

## APLICACIÓN DEL MODELO DE DISEÑO DE EXPERIMENTOS COMPLETAMENTE AL AZAR PARA EL ANÁLISIS Y TOMA DE DECISIONES EN CASOS PRÁCTICOS DE INGENIERÍA

### APPLICATION OF THE COMPLETE RANDOM EXPERIMENTAL DESIGN MODEL FOR THE ANALYSIS AND DECISION MAKING IN PRACTICAL ENGINEERING CASES

Eliana Elizabeth Morillo Taco<sup>1</sup>, César Sebastián Silva Proaño<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Universidad de Fuerzas Armadas ESPE, Becaria Universidades de Excelencia por la Secretaria de Educación Superior, Ciencia Tecnología e Innovación de la República del Ecuador SENESCYT, Universidad de Buenos Aires UBA. Aires

<sup>2</sup>Escuela Politécnica Nacional, Pontificia Universidad Católica del Ecuador, Universidad Técnica de Hamburgo, Inspector de Calidad Airbus – DB Schenker

e-mail : <sup>1</sup>elianamorillo@gmail.com , <sup>2</sup>sebas.silva.p@gmail.com

Revista Energía Mecánica Innovación y Futuro, IX Edición 2020, No. 1 (10)

#### Resumen

El presente artículo tiene el objetivo principal de aplicar la teoría del diseño experimental para analizar un caso de estudio típico en la industria, la comprobación de hipótesis para la toma de decisiones. Se utiliza el modelo de diseño de experimentos completamente al azar, la teoría de probabilidad y estadística, y el análisis de varianza o ANOVA para este fin.

Se ahonda en primer lugar en la teoría de probabilidad y estadística necesaria para entendimiento de los cálculos numéricos. También se exponen los modelos de diseño experimental que existen y se da énfasis especial al modelo experimental completamente al azar, que es la base del desarrollo del presente artículo.

Se presenta un caso de estudio típico en la industria y se procede a su análisis a través del modelo experimental y la posterior toma de decisiones. Finalmente, el entendimiento del método aquí mostrado puede conllevar a su aplicación en diversos entornos y casos dentro de la industria.

**Palabras Clave:** Estadística, Diseño de Experimentos, valor-p, ANOVA, Varianza.

#### Abstract

*The present article has the principal objective of applying the theory of the experimental design for analysing a typical study case in the industry, the hypothesis verification in order to make a decision. The random experimental design, the theory of statistics and probability, and the variance analysis or ANOVA are used for this purpose.*

*First of all, the necessary theory of probability and statistics is shown for the consequent understanding of the numerical calculations. Additionally, the experimental design models are presented in general and a special emphasis is given to the random experimental model, which is the base of the present article.*

*A typical industrial case of study is presented, and its analysis is made with an experimental model for the consequent decision making. Finally, the understanding of the method presented here can develop the application of this study in several environments and cases into the industry.*

**Keywords:** Statistics, Experiments Design, p-value, ANOVA, Variance.

## 1. Introducción

El diseño estadístico de experimentos abreviado al castellano como DEE o DDE se basa en la realización de pruebas que permitan establecer evidencias objetivas que aclaren y clarifiquen aspectos inciertos de un proceso, resolver problemas dentro de este y conseguir mejoras. Las evidencias objetivas son el resultado de un análisis estadístico. [1]

Básicamente el diseño de experimentos consiste en la aplicación del método científico con el fin de proporcionar información o conocimiento respecto a un proceso o un sistema, a través de pruebas o “tests” que han sido previamente planificados. Debido a esto el diseño de experimentos utiliza básicamente la ingeniería y la estadística con objeto de entender las situaciones más complejas de la relación causa-efecto. [1]

Es necesaria en primera instancia la definición correcta de lo que es un proceso. Un proceso se define como la secuencia de pasos a seguir con un carácter lógico, con el fin de obtener un resultado específico. En un proceso se tiene una entrada y una salida. En la entrada tenemos dos tipos de factores: factores controlables y factores no controlables; mientras que en la salida se tienen variables de respuesta o características de calidad, ver Figura 1. [2]



Figura 1. Definición de Proceso

Una variable se define como la característica de un objeto de estudio que puede ser sometida a observación, medición y análisis con el fin de determinar una respuesta a un problema. Las variables dentro del estudio experimental se clasifican en: [3]

- Variables independientes: Son aquellas que tienen

una influencia directa sobre la característica o fenómeno que se está tratando.

- Variables dependientes: Son medidas en cada repetición del experimento con el fin de verificar si las variables independientes tienen una influencia directa en su valor.
- Variables extrañas: Son aquellas variables que no se pueden variar, pero que tienen una influencia sobre la variable dependiente. También se las considera como error experimental o ruido.
- Variables de bloqueo: Estas intervienen en la respuesta de una variable dependiente y tienen la capacidad de eliminar su influencia al momento que les asigna el valor de una constante.

Es importante también definir la “Unidad Experimental”. Se define como la unidad más pequeña mediante la cual se puede obtener una medida o característica. Por ejemplo, para un investigador en general puede ser de interés: las familias, las personas, las empresas de un cierto tipo, etc. [4]

Los niveles dentro del estudio experimental se definen como todos los valores que puede tener el factor a estudiar. Como característica general, los valores deben en primer lugar poder ser medidos y en segundo lugar deben ser discretos o continuos. [5]

Un tratamiento es en sí cada una de las pruebas o ensayos que se realizan en el diseño experimental, y que contiene a los factores en un determinado nivel. Cuando un tratamiento puede ser probado más de una vez, a esto se le denomina réplicas o repeticiones. También cuando al menos un nivel en un factor es cambiado, se tiene entonces otro tratamiento diferente puesto que ya se ha cambiado una condición de los factores. [2]

La aleatorización se define como una técnica usada para conseguir un equilibrio del efecto de las condiciones externas o no controlables, las cuales pueden influir en los resultados de un experimento. [6]

La prueba ANOVA, término que proviene del inglés “Analysis of Variance” traducido al español como análisis de varianza es un test estadístico que permite determinar si los resultados de una encuesta o experimento son significantes o relevantes. En resumen y básicamente una prueba ANOVA concluye de manera cuantitativa si se deben rechazar hipótesis nulas planteadas para un experimento, o caso contrario, se deben plantear y aceptar hipótesis alternativas. [7]

Revisados de manera general los conceptos más relevantes en el diseño experimental, es ahora importante citar los pasos para una correcta planeación y realización del proceso experimental. La realización, por etapas de las diferentes actividades del proceso experimental garantiza el éxito de este estudio. Estas etapas se definen a continuación:

- a) En primer lugar, se debe entender, comprender y delimitar el objeto de estudio o problema. Este primer paso conlleva investigaciones preliminares que ayudan a entender el objeto de estudio, para de esta manera tener claro qué es lo que se va a estudiar, por qué es importante su estudio, y en caso de ser un problema, cuál es la magnitud del mismo.
- b) En segundo lugar, las variables de respuesta deben ser seleccionadas y además se debe verificar que su medición es confiable. La correcta selección de estas variables garantiza el resultado de las pruebas. En otras palabras, los elementos y/o métodos de medición deben tener la precisión y exactitud necesaria para evitar errores.
- c) En tercer lugar, se debe determinar los factores de estudio que se deben investigar tomando en cuenta la posible influencia sobre la respuesta del proceso.
- d) Determinados los factores, se deben seleccionar ahora los niveles de cada uno de estos factores, y también el diseño experimental más adecuado con respecto a los factores determinados y el objetivo del experimento.
- e) Planeación y organización del trabajo experimental.
- f) Finalmente se realiza la ejecución del experimento.

Explicado esto, se debe ahora determinar cuál es el diseño experimental más adecuado, de acuerdo al objetivo o proyecto a realizar.

En primera instancia es necesario citar los 5 aspectos más importantes que influyen de una manera directa en el proceso de selección de un diseño experimental:

- Se debe determinar cuál es el objetivo, o

qué es lo que se desea obtener por medio del experimento.

- Cuántos factores de estudio existen.
- Determinar el número de niveles que son puestos a prueba en cada uno de los factores.
- Qué efectos son de interés para la investigación (cuál es la relación entre los factores y la respuesta).
- Finalmente se debe determinar el costo del experimento, el tiempo disponible para llevarlo a cabo y la precisión requerida para la ejecución del mismo.

Dicho todo esto se puede clasificar a los diseños experimentales de la siguiente manera:

- a) Diseño experimental para la comparación de 2 o más tratamientos.
- b) Diseño experimental para el estudio del efecto de varios factores en las respuestas.
- c) Diseño experimental para obtener el punto óptimo en el cual opera un proceso.
- d) Diseño experimental para la optimización de una mezcla.
- e) Diseño experimental con el fin de que un proceso o producto sea insensible a factores que no se pueden controlar.

En base a esto y los estudios realizados detrás de la teoría del diseño experimental se tienen los diseños estadísticos de procesos como muestra la Figura 2.

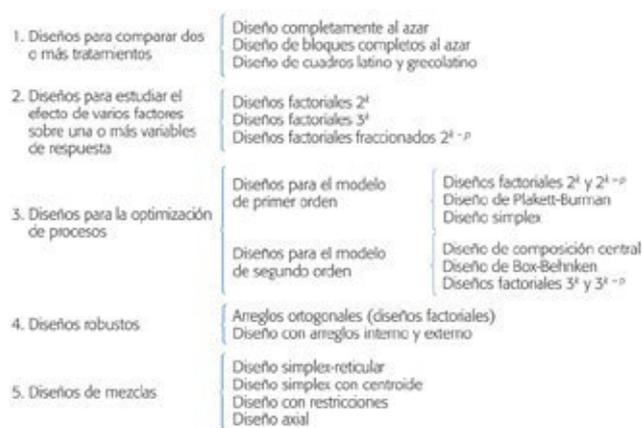


Figura 2. Clasificación teórica de los diseños de experimentos

Dentro del estudio y análisis del diseño experimental se debe también definir la teoría de las distribuciones de probabilidad

En el margen conceptual de la probabilidad y estadística se define a la distribución de probabilidad de una variable de tipo aleatorio como una función que asigna a cada suceso de la variable, la probabilidad de que este suceso se lleve a cabo,

Se lo representa ya sea a través de una fórmula o por una función.

Consecuentemente, la distribución de probabilidad contradice lo aleatorio como un suceso del cual no se tiene control alguno, y asigna un valor estadístico muestral, con el cual se puede afirmar o negar hipótesis e incluso realizar estimaciones de tipo poblacional.

Para el análisis de intervalos de confianza y pruebas de hipótesis existen 4 distribuciones de probabilidad que son de gran utilidad dentro del análisis experimental, ver Figura 3, Figura 4, Figura 5 y Figura 6.

- Normal

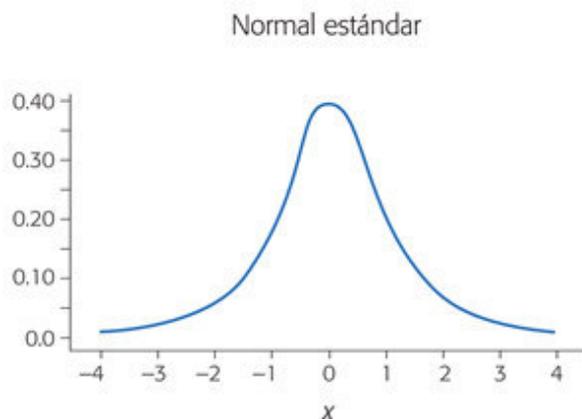


Figura 3. Distribución Normal

- T de Student

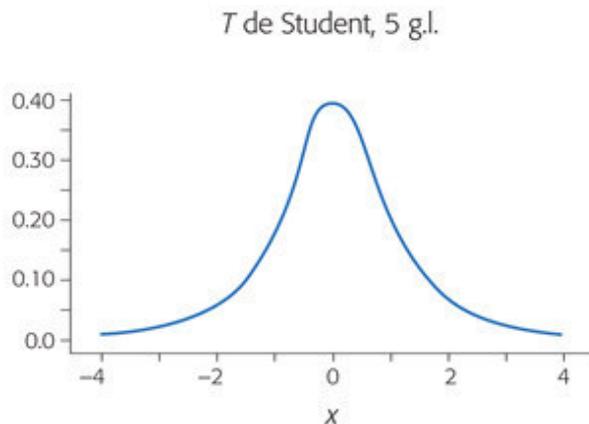


Figura 4. Distribución T de Student

- Ji-Cuadrada

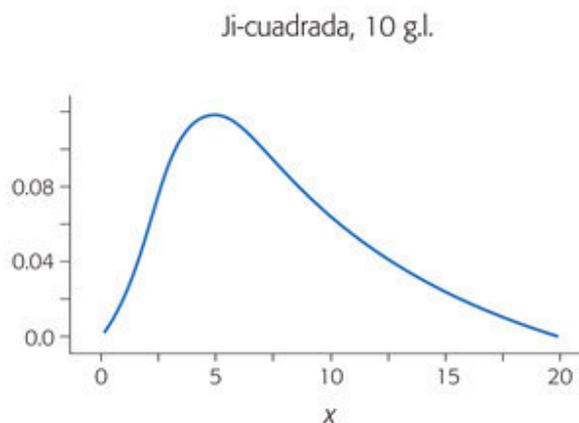


Figura 5. Distribución Ji-Cuadrada

- F

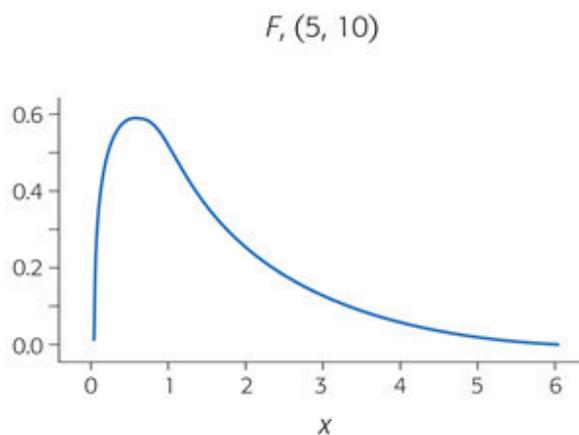


Figura 6. Distribución F

Para el caso de las distribuciones T de Student, Ji-Cuadrada y F, estas distribuciones se definen completamente por medio de parámetros denominados grados de libertad que están relacionados con los tamaños de muestra concernientes al estudio.

La T de Student se aproxima a una distribución normal estándar cuando la muestra aumenta de tamaño. Con un tamaño de muestra mayor a 45 la T de Student y la distribución normal son las mismas.

Cada una de estas 4 distribuciones tienen un papel fundamental en el diseño experimental:

- T de Student y distribución normal: Se utilizan más para inferir sobre el valor de la media aritmética.
- Ji-Cuadrada: Para inferir sobre el valor de la varianza.
- F: Para realizar comparaciones en los valores

de la varianza.

En el estudio experimental la distribución F es la que juega un papel más relevante puesto que el estudio de la variabilidad de un experimento se realiza al comparar los valores de varianza.

Dentro de la estadística, al momento de realizar una estimación de un parámetro, se puede también determinar el nivel de precisión de esta estimación por medio de un intervalo de confianza, el cual básicamente va a determinar de dónde a dónde se puede encontrar este parámetro.

De esta manera para un parámetro desconocido  $\theta$ , la probabilidad porcentual de que este se encuentre en el intervalo de dos números estadísticos  $L$  y  $U$  es de  $100(1-\alpha)\%$ . En términos de probabilidad se enuncia de la siguiente manera:

$$P(L \leq \theta \leq U) = 1 - \alpha \quad \text{Ec. 1}$$

A continuación, se presenta de manera más detallado un estudio teórico del concepto de ANOVA o Análisis de Varianza, en términos generales.

Mediante la inferencia estadística, se pueden comparar dos tratamientos o condiciones (Figura 7). Cuando se desea comparar varios tratamientos de manera sistemática, se debe utilizar el ANOVA. El ANOVA se utiliza ya sea para el estudio de uno o más factores por lo que su estudio se divide en ANOVA para 1 factor y ANOVA factorial. [7]

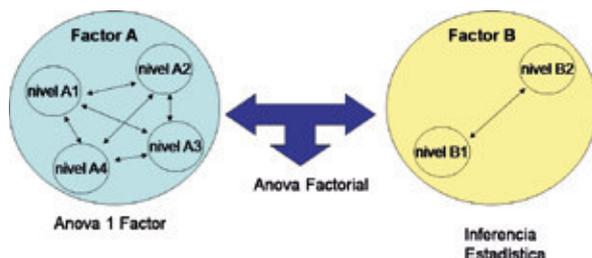


Figura 7. Definición de ANOVA

Se define ahora lo que son los “factores de bloque”.

Los factores de bloque son aquellos que intervienen si bien es cierto y de alguna manera en el experimento que se realiza, pero no es de interés el estudiarlos. Por lo tanto, se los puede definir como factores de carácter “secundario”. Sin embargo, es importante el considerarlos porque su influencia es innegable. Al momento que se los toma en cuenta dentro del experimento, se está estableciendo un control

sobre ellos, por tanto, se los fija en distintos niveles conocidos, y con esto se puede evaluar su efecto. [8]

El diseño experimental para 1 factor comprende 4 tipos básicos de diseño: [1]

- Diseño Completamente al Azar DCA: 0 bloques.
- Diseño en Bloques Completos al Azar DBCA: 1 bloque.
- Diseño en Cuadro Latino: 2 bloques.
- Diseño en Cuadro Greco-Latino: 3 bloques.

En el modelo estadístico para el diseño experimental la variable estadística se encuentra determinada de la siguiente manera: [1]

$$Y = \mu + \tau + \varepsilon \quad \text{Ec. 2}$$

Donde:

- $Y$  es la variable de salida.
- $\mu$  es la media estadística.
- $\tau$  es el efecto o error del tratamiento.
- $\varepsilon$  es el error aleatorio.

Por tanto, la respuesta está afectada por dos tipos de variabilidad: el efecto del tratamiento y el error aleatorio.

Debido a que la media estadística es igual para todos los tratamientos y el error aleatorio debe ser el mínimo posible, el término de interés para el análisis en el Diseño de Experimentos es el efecto del tratamiento. Este efecto de tratamiento se puede dividir en varios términos en relación al número de bloques. En caso de que exista un cambio en el valor de la variable de salida, se espera entonces que este cambio sea debido al efecto de tratamiento. [1]

El modelo estadístico planteado no toma en consideración la interacción que existe entre los bloques, interacción que en la práctica suele ser pequeño y debido a esto el modelo se ajusta de manera adecuada a la práctica.

Definidos todos estos conceptos, el enfoque es ahora en el diseño experimental base de este artículo, el Diseño Completamente al Azar abreviado con las siglas DCA.

El estudio de este artículo se centra en el diseño completamente al azar como una herramienta de gran eficiencia para la toma de decisiones dentro de la vida

ingenieril.

Este diseño experimental es sin duda uno de los modelos más simples debido a que para su análisis interviene solamente un factor sin bloques.

Los niveles de este único factor son puestos a prueba considerando un orden aleatorio para este propósito.

La recomendación más importante a tomar en cuenta es de no usar este método experimental cuando se tiene indicios de que otros factores están interactuando en el proceso.

Una vez que se pone a correr los tratamientos, el análisis ANOVA debe ser llevado a cabo con el fin de probar las hipótesis.

La hipótesis nula, base de este modelo es que la media estadística de todos los tratamientos es la misma, suponiendo que las varianzas obtenidas son iguales. También se debe considerar que existe un balance en el experimento cuando existe el mismo número de repeticiones en cada tratamiento (simbolizando el número de repeticiones como  $n$ ).

- $n = 10$  en caso de que la dispersión sea mayor a 1.5 sigmas.
- $n = 30$  en caso de que la dispersión sea menor a 0.7 sigmas.

El modelo que se plantea para este tratamiento es el siguiente:

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \tag{Ec. 3}$$

En este caso el efecto del tratamiento es el que mueve a la media aritmética de cada experimento con respecto a la media global.

$$\tau_i = \mu_i - \mu \tag{Ec. 4}$$

Tomando en cuenta el número de elementos que se van a medir, se tienen dos consideraciones:

- Cuando el número de elementos a medir es escaso se toma como consideración el universo.
- En caso de que el número de elementos a medir sean demasiados, es necesario tomar una muestra y se tiene por tanto un modelo de efectos aleatorios.

Ahora es necesario una vez retomar el concepto del ANOVA, pero esta vez enfocado al análisis experimental completamente al azar.

Como se ha mencionado y enfatizado anteriormente el análisis de la varianza también denominado ANOVA es la técnica central mediante la cual se realiza el análisis de los datos experimentales.

El objetivo principal del ANOVA es el de separar la variación total en cada una de las partes con las que se consolida cada fuente de variación dentro del experimento de estudio.

Como se explicó anteriormente en el caso del diseño completamente al azar se deben separar la variabilidad debida a los tratamientos y la variabilidad debida al error.

En el caso de que la variabilidad debido a los tratamientos predomine de una manera “contundente” sobre la variabilidad debida al error, se concluye entonces que los tratamientos tienen efecto o, en otras palabras, las medias son diferentes, como se evidencia en la Figura 8.

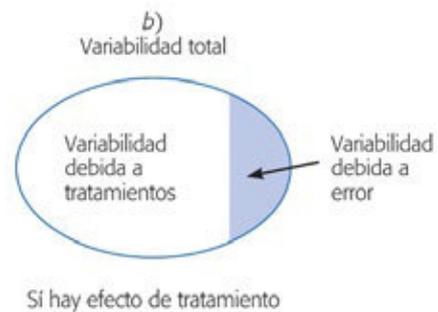


Figura 8. Variabilidad debido a los tratamientos predomina sobre la variabilidad debido al error

En el caso opuesto de que los tratamientos no tengan un dominio claro en el experimento, es decir, estos contribuyen igual o menos que el error, se puede concluir que las medias son iguales, ver Figura 9.



Figura 9. Variabilidad debido a los tratamientos NO predomina sobre la variabilidad debido al error

Los efectos de los tratamientos dentro del diseño completamente al azar se muestran en la Figura 10:

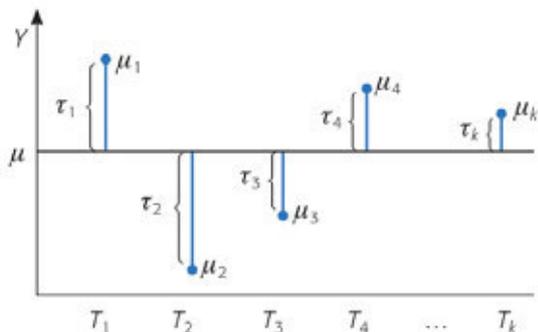


Figura 10. Representación gráfica de los efectos de los tratamientos en un diseño completamente al azar

Se presenta ahora el análisis cuantitativo de los conceptos estadísticos para el desarrollo del análisis de varianza en el diseño experimental completamente al azar. [9]

Donde:

- $k$  = número de tratamientos

$$N = \sum_{i=1}^{n_i} n_i$$

Es el número total de observaciones  $N$  o también llamadas mediciones donde  $n_i$  es el componente individual de cada observación.

- $Y_{i\cdot}$

Se define como la suma de las observaciones de un tratamiento en específico  $i$ .

- $\bar{Y}_{i\cdot}$

Es la media aritmética de las observaciones efectuadas para el tratamiento  $i$ -ésimo.

- $Y_{\cdot\cdot}$

Es la suma total de las  $N = n_1 + n_2 + \dots + n_k$  mediciones u observaciones realizadas para todos los tratamientos.

- $\bar{Y}_{\cdot\cdot}$

Se define como la media global o promedio de todas las observaciones realizadas en el estudio experimental.

- $\alpha$

Alfa es el nivel de significancia dentro del estudio de estadística y probabilidad. Básicamente, es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando es verdadera. En este artículo se va a utilizar el valor de 0,05 o 5% que significa que existe un 5% de concluir el rechazo de una hipótesis. [10]

- *valor p*

El valor-p es la probabilidad de tener un efecto de significancia tan extrema como los datos de la muestra, cuando se asume la veracidad de la hipótesis nula. [10]

El objetivo principal en el Diseño Completamente al Azar es el de probar la llamada hipótesis de igualdad de los tratamientos con respecto a la media aritmética de la variable de respuesta:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = \mu$$

$$H_A : \mu_i \neq \mu_j \text{ para algún } i \neq j$$

Ec. 5

De una manera equivalente se puede escribir las anteriores relaciones de la siguiente manera:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_k = 0$$

$$H_A : \tau_i \neq 0 \text{ para algún } i$$

Ec. 6

Donde:

$\tau_i$  se define como el efecto del tratamiento  $i$  que existe sobre la variable de respuesta.

En el momento que se acepta  $H_0$  entonces se confirma que el efecto en la respuesta de los  $k$  tratamientos existentes es nulo o igual a cero. En el caso opuesto que se rechaza esta hipótesis, entonces se concluye que al menos uno de los efectos es diferente a cero.

Para la comprobación de la hipótesis se utiliza justamente el ANOVA, para lo cual se debe descomponer en primer lugar la variabilidad total de los datos en dos componentes:

- La variabilidad existente debida a los tratamientos.
- La variabilidad correspondiente al error aleatorio.

Ec. 11

La medida de la variabilidad se representa a través la suma total de los cuadrados.

Considerando esto se definen las siguientes medidas de variabilidad: [11]

$$SC_T = SC_{TRAT} + SC_E \quad \text{Ec. 7}$$

$$SC_T = \sum_{i=1}^k n_i \left( \bar{Y}_{i\cdot} - \bar{Y}_{\cdot\cdot} \right)^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} \left( Y_{ij} - \bar{Y}_{i\cdot} \right)^2 \quad \text{Ec. 8}$$

Donde:

- $SC_T$  es la suma de cuadrados total
- $SC_{TRAT}$  es la suma de cuadrados de los tratamientos
- $SC_E$  es la suma de cuadrados del error

Y los grados de libertad:

- $SC_T$  tiene  $N - 1$  grados de libertad.
- $SC_{TRAT}$  relacionado con el número de tratamientos  $k$  tiene entonces  $k - 1$  grados de libertad.
- $SC_E$  tiene  $N - k$  grados de libertad.

Los cuadrados medios se definen como las sumas de lo cuadrados divididas para sus correspondientes grados de libertad. Por tanto, se tienen dos casos en concreto:

$$CM_{TRAT} = \frac{SC_{TRAT}}{k - 1} \quad \text{Ec. 9}$$

y

$$CM_E = \frac{SC_E}{N - k} \quad \text{Ec. 10}$$

Adicionalmente, se conceptualizan los valores esperados para los cuadrados medios, donde de igual manera se tiene uno para el caso los tratamientos y otro para el error:

$$E(CM_E) = \sigma^2$$

$$E(CM_{TRAT}) = \sigma^2 + \frac{\sum_{i=1}^k n_i \tau_i^2}{N - k} \quad \text{Ec. 12}$$

Por medio de estas expresiones se puede confirmar que cuando la hipótesis nula es verdadera, entonces, ambos cuadrados medios estiman la varianza o  $\sigma^2$

Tomando entonces en consideración la veracidad de la hipótesis  $H_0$  se define el estadístico  $F_0$  como:

$$F_0 = \frac{CM_{TRAT}}{CM_E} \quad \text{Ec. 13}$$

Este estadístico sigue una distribución  $F$  con grados de libertad  $k - 1$  en el numerador y con  $N - k$  en el denominador.

Se puede con esto concluir que:

- Si  $F_0$  es grande, la hipótesis base de que no hay efectos en los tratamientos se contradice, por otro lado,
- Si  $F_0$  es pequeño se confirma de esta manera la validez de la hipótesis principal  $H_0$

Considerando entonces un nivel de significancia  $\alpha$  prefijado, se puede rechazar  $H_0$  cuando  $F_0 > F_{\alpha, k-1, N-k}$

$F_{\alpha, k-1, N-k}$  es el percentil  $(1 - \alpha) \times 100$  de la distribución  $F$ .

Se rechaza también la hipótesis nula  $H_0$  en el momento que el *valor - p*  $< \alpha$ , donde el *valor - p* no es sino el área debajo de la distribución  $F_{\alpha, k-1, N-k}$  que se encuentra a la derecha del estadístico  $F_0$ .

Por tanto:

$$\text{valor} - p = P(F > F_0) \quad \text{Ec. 14}$$

Un ejemplo práctico de esto, es cuando en una industria se tienen 4 tipos diferentes de máquinas que realizan el mismo producto. El tipo de máquina viene a ser en este caso el tratamiento. Se realiza

aleatoriamente mediciones del tiempo que se demora cada máquina para realizar el producto. Cada medición es una observación.

El experimento a plantear aquí es el siguiente: ¿Existe una influencia del tipo de máquina para la realización del producto?

En caso de que no, entonces los tiempos promedio de los 4 tipos de máquina deben ser estadísticamente iguales, o en otras palabras, la siguiente hipótesis:

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_k = 0$$

Es verdadera, y no se rechaza

En caso de que si, se concluye que al menos dos de los tiempos promedios son estadísticamente diferentes uno del otro y la hipótesis planteada se rechaza o es falsa.

Este es justamente el objetivo principal que se plantea con el ANOVA en el Diseño Completamente al Azar.

En caso de que se rechace la hipótesis, se sabe entonces que existe una máquina que produce de manera diferente a las otras 4, pero estadísticamente, esto también se lo puede comprobar. Con este fin, se puede utilizar la Diferencia Mínima Significativa o LSD. Este método calcula un estadístico que se compara con la diferencia de medias de cada tratamiento. Este estadístico se basa en la distribución T de Student.

$$LSD = t_{\alpha/2, N-k} \sqrt{\frac{2CM_E}{n}}$$

Ec. 15

Donde:

- $t_{\alpha/2, N-k}$  es el valor de la distribución T de Student evaluada los respectivos grados de libertad.
- $CM_E$  es el cuadrado medio del Error.
- $N$  es el número total existente de experimentos realizados.
- $k$  es el número de tratamientos.
- $n$  es el número de réplicas que se realizan por cada tratamiento.

En caso de que la diferencia de medias sea mayor al estadístico LSD, se puede concluir que estadísticamente que la diferencia es SIGNIFICATIVA,

y que este par de tratamientos, o como en este caso del ejemplo práctico, las dos máquinas analizadas, NO SON IGUALES, o actúan de manera diferente en la producción.

Es importante también considerar que el ANOVA realiza la suposición de que la variable de respuesta se distribuye de una manera normal con una varianza constante (esto se debe a que los tratamientos tienen una varianza similar) y también que las mediciones realizadas son independientes unas de otras.

Finalmente, la validez del experimento asume 3 supuestos: normalidad, existencia de varianza constante y por último la independencia.

- La verificación de la normalidad se realiza mediante una gráfica de las observaciones  $r_i$  en orden ascendente respecto a su valor normal inverso representado como  $Z_i$ . Cuando el gráfico obtenido es una tendencia de línea recta, se puede concluir que se cumple la normalidad.
- El supuesto de varianza constante se comprueba mediante la gráfica de los promedios por nivel versus los residuos. En este caso se debe listar cada una de las observaciones en el orden mediante el cual fueron realizadas, su promedio y el residuo resultante. Cuando la gráfica muestra un patrón o asimetría clara, entonces se puede concluir que la varianza no es constante, caso contrario, lo es.
- Finalmente, el supuesto de independencia es verificable comprobando el orden aleatorio en el cual se realizan los experimentos.

Para finalizar esta introducción teórica se realiza un recuento de las tablas importantes (Tabla 1, 2 y 3) que se utilizan esencialmente en el diseño de experimentos. [12] [13]

Tabla 3. Puntos críticos para la distribución T de Student

Tabla 1. Puntos críticos al 5% de la distribución F,  $P(X > x) = 0.05$

| Grados de libertad en el denominador | Grados de libertad en el numerador |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--------------------------------------|------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|                                      | 1                                  | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
| 1                                    | 161                                | 199  | 216  | 225  | 230  | 234  | 237  | 239  | 241  | 242  |
| 2                                    | 18.5                               | 18.0 | 18.2 | 18.2 | 18.3 | 18.3 | 18.4 | 18.4 | 18.4 | 18.4 |
| 3                                    | 10.1                               | 9.55 | 9.28 | 9.22 | 9.17 | 9.14 | 9.12 | 9.11 | 9.10 | 9.10 |
| 4                                    | 7.71                               | 6.91 | 6.59 | 6.50 | 6.43 | 6.39 | 6.36 | 6.35 | 6.34 | 6.34 |
| 5                                    | 6.61                               | 5.79 | 5.41 | 5.31 | 5.25 | 5.21 | 5.19 | 5.18 | 5.17 | 5.17 |
| 6                                    | 5.99                               | 5.14 | 4.76 | 4.65 | 4.59 | 4.56 | 4.54 | 4.53 | 4.52 | 4.52 |
| 7                                    | 5.59                               | 4.73 | 4.35 | 4.24 | 4.18 | 4.15 | 4.14 | 4.13 | 4.12 | 4.12 |
| 8                                    | 5.32                               | 4.46 | 4.07 | 3.96 | 3.90 | 3.87 | 3.86 | 3.85 | 3.84 | 3.84 |
| 9                                    | 5.12                               | 4.26 | 3.88 | 3.77 | 3.71 | 3.68 | 3.67 | 3.66 | 3.65 | 3.65 |
| 10                                   | 4.96                               | 4.10 | 3.71 | 3.60 | 3.54 | 3.51 | 3.50 | 3.49 | 3.48 | 3.48 |
| 11                                   | 4.84                               | 3.98 | 3.59 | 3.48 | 3.42 | 3.39 | 3.38 | 3.37 | 3.36 | 3.36 |
| 12                                   | 4.75                               | 3.89 | 3.49 | 3.38 | 3.32 | 3.29 | 3.28 | 3.27 | 3.26 | 3.26 |
| 13                                   | 4.67                               | 3.81 | 3.41 | 3.30 | 3.24 | 3.21 | 3.20 | 3.19 | 3.18 | 3.18 |
| 14                                   | 4.60                               | 3.74 | 3.34 | 3.23 | 3.17 | 3.14 | 3.13 | 3.12 | 3.11 | 3.11 |
| 15                                   | 4.54                               | 3.68 | 3.28 | 3.17 | 3.11 | 3.08 | 3.07 | 3.06 | 3.05 | 3.05 |
| 16                                   | 4.49                               | 3.63 | 3.23 | 3.12 | 3.06 | 3.03 | 3.02 | 3.01 | 2.99 | 2.99 |
| 17                                   | 4.45                               | 3.59 | 3.19 | 3.08 | 3.02 | 2.99 | 2.98 | 2.97 | 2.96 | 2.96 |
| 18                                   | 4.41                               | 3.55 | 3.15 | 3.04 | 2.98 | 2.95 | 2.94 | 2.93 | 2.92 | 2.92 |
| 19                                   | 4.38                               | 3.52 | 3.12 | 3.01 | 2.95 | 2.92 | 2.91 | 2.90 | 2.89 | 2.89 |
| 20                                   | 4.35                               | 3.49 | 3.09 | 2.98 | 2.92 | 2.89 | 2.88 | 2.87 | 2.86 | 2.86 |
| 21                                   | 4.32                               | 3.47 | 3.07 | 2.96 | 2.90 | 2.87 | 2.86 | 2.85 | 2.84 | 2.84 |
| 22                                   | 4.30                               | 3.44 | 3.04 | 2.93 | 2.87 | 2.84 | 2.83 | 2.82 | 2.81 | 2.81 |
| 23                                   | 4.28                               | 3.42 | 3.02 | 2.91 | 2.85 | 2.82 | 2.81 | 2.80 | 2.79 | 2.79 |
| 24                                   | 4.26                               | 3.40 | 3.00 | 2.89 | 2.83 | 2.80 | 2.79 | 2.78 | 2.77 | 2.77 |
| 25                                   | 4.24                               | 3.38 | 2.98 | 2.87 | 2.81 | 2.78 | 2.77 | 2.76 | 2.75 | 2.75 |
| 26                                   | 4.23                               | 3.37 | 2.97 | 2.86 | 2.80 | 2.77 | 2.76 | 2.75 | 2.74 | 2.74 |
| 27                                   | 4.22                               | 3.37 | 2.97 | 2.86 | 2.80 | 2.77 | 2.76 | 2.75 | 2.74 | 2.74 |
| 28                                   | 4.21                               | 3.36 | 2.96 | 2.85 | 2.79 | 2.76 | 2.75 | 2.74 | 2.73 | 2.73 |
| 29                                   | 4.20                               | 3.34 | 2.95 | 2.84 | 2.78 | 2.75 | 2.74 | 2.73 | 2.72 | 2.72 |
| 30                                   | 4.19                               | 3.33 | 2.94 | 2.83 | 2.77 | 2.74 | 2.73 | 2.72 | 2.71 | 2.71 |

Tabla 2. Puntos críticos al 10% de la distribución F,  $P(X > x) = 0.10$

| Grados de libertad en el denominador | Grados de libertad en el numerador |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--------------------------------------|------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
|                                      | 1                                  | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
| 1                                    | 40                                 | 50   | 54   | 56   | 57   | 58   | 59   | 60   | 60   | 61   |
| 2                                    | 8.5                                | 9.0  | 9.2  | 9.3  | 9.3  | 9.4  | 9.4  | 9.4  | 9.4  | 9.4  |
| 3                                    | 5.5                                | 5.06 | 4.79 | 4.73 | 4.70 | 4.68 | 4.67 | 4.66 | 4.65 | 4.65 |
| 4                                    | 4.54                               | 4.32 | 4.19 | 4.11 | 4.05 | 4.01 | 3.98 | 3.95 | 3.94 | 3.92 |
| 5                                    | 4.06                               | 3.78 | 3.62 | 3.52 | 3.45 | 3.40 | 3.37 | 3.34 | 3.32 | 3.30 |
| 6                                    | 3.78                               | 3.46 | 3.29 | 3.18 | 3.11 | 3.05 | 3.01 | 2.98 | 2.96 | 2.94 |
| 7                                    | 3.59                               | 3.26 | 3.07 | 2.96 | 2.88 | 2.83 | 2.79 | 2.75 | 2.72 | 2.70 |
| 8                                    | 3.46                               | 3.11 | 2.92 | 2.81 | 2.73 | 2.67 | 2.62 | 2.59 | 2.56 | 2.54 |
| 9                                    | 3.36                               | 3.01 | 2.81 | 2.69 | 2.61 | 2.55 | 2.51 | 2.47 | 2.44 | 2.42 |
| 10                                   | 3.29                               | 2.92 | 2.73 | 2.61 | 2.52 | 2.46 | 2.41 | 2.38 | 2.35 | 2.32 |
| 11                                   | 3.23                               | 2.86 | 2.66 | 2.54 | 2.45 | 2.39 | 2.34 | 2.30 | 2.27 | 2.25 |
| 12                                   | 3.18                               | 2.81 | 2.61 | 2.48 | 2.39 | 2.33 | 2.28 | 2.24 | 2.21 | 2.19 |
| 13                                   | 3.14                               | 2.76 | 2.56 | 2.43 | 2.35 | 2.29 | 2.24 | 2.20 | 2.16 | 2.14 |
| 14                                   | 3.10                               | 2.72 | 2.52 | 2.39 | 2.31 | 2.24 | 2.19 | 2.15 | 2.11 | 2.09 |
| 15                                   | 3.07                               | 2.70 | 2.49 | 2.36 | 2.27 | 2.21 | 2.16 | 2.12 | 2.08 | 2.06 |
| 16                                   | 3.05                               | 2.67 | 2.46 | 2.33 | 2.24 | 2.18 | 2.13 | 2.09 | 2.05 | 2.03 |
| 17                                   | 3.03                               | 2.64 | 2.43 | 2.31 | 2.22 | 2.15 | 2.10 | 2.06 | 2.03 | 2.01 |
| 18                                   | 3.01                               | 2.62 | 2.41 | 2.29 | 2.20 | 2.13 | 2.08 | 2.04 | 2.00 | 1.98 |
| 19                                   | 2.99                               | 2.61 | 2.40 | 2.27 | 2.18 | 2.11 | 2.06 | 2.02 | 1.98 | 1.95 |
| 20                                   | 2.97                               | 2.59 | 2.38 | 2.25 | 2.16 | 2.09 | 2.04 | 2.00 | 1.96 | 1.94 |
| 21                                   | 2.96                               | 2.57 | 2.36 | 2.23 | 2.14 | 2.07 | 2.02 | 1.98 | 1.94 | 1.91 |
| 22                                   | 2.95                               | 2.56 | 2.35 | 2.22 | 2.13 | 2.06 | 2.01 | 1.97 | 1.93 | 1.90 |
| 23                                   | 2.94                               | 2.55 | 2.34 | 2.21 | 2.11 | 2.04 | 1.99 | 1.95 | 1.91 | 1.88 |
| 24                                   | 2.93                               | 2.54 | 2.33 | 2.19 | 2.10 | 2.03 | 1.98 | 1.94 | 1.90 | 1.87 |
| 25                                   | 2.92                               | 2.53 | 2.32 | 2.18 | 2.09 | 2.02 | 1.97 | 1.93 | 1.89 | 1.86 |
| 26                                   | 2.91                               | 2.52 | 2.31 | 2.17 | 2.08 | 2.01 | 1.96 | 1.92 | 1.88 | 1.85 |
| 27                                   | 2.90                               | 2.51 | 2.30 | 2.17 | 2.07 | 2.00 | 1.95 | 1.91 | 1.87 | 1.84 |
| 28                                   | 2.89                               | 2.50 | 2.29 | 2.16 | 2.06 | 2.00 | 1.94 | 1.90 | 1.86 | 1.83 |
| 29                                   | 2.89                               | 2.50 | 2.28 | 2.15 | 2.05 | 1.99 | 1.93 | 1.89 | 1.85 | 1.82 |
| 30                                   | 2.88                               | 2.49 | 2.28 | 2.14 | 2.04 | 1.98 | 1.92 | 1.88 | 1.84 | 1.81 |
| 31                                   | 2.87                               | 2.48 | 2.27 | 2.13 | 2.03 | 1.97 | 1.91 | 1.87 | 1.83 | 1.80 |
| 32                                   | 2.86                               | 2.47 | 2.26 | 2.12 | 2.02 | 1.96 | 1.90 | 1.86 | 1.82 | 1.79 |
| 33                                   | 2.85                               | 2.46 | 2.25 | 2.11 | 2.01 | 1.95 | 1.89 | 1.85 | 1.81 | 1.78 |
| 34                                   | 2.84                               | 2.45 | 2.24 | 2.10 | 1.99 | 1.93 | 1.87 | 1.83 | 1.79 | 1.76 |
| 35                                   | 2.83                               | 2.44 | 2.23 | 2.09 | 1.98 | 1.92 | 1.86 | 1.82 | 1.78 | 1.75 |
| 36                                   | 2.82                               | 2.43 | 2.22 | 2.08 | 1.97 | 1.91 | 1.85 | 1.81 | 1.77 | 1.74 |
| 37                                   | 2.81                               | 2.42 | 2.21 | 2.07 | 1.96 | 1.90 | 1.84 | 1.80 | 1.76 | 1.73 |
| 38                                   | 2.80                               | 2.41 | 2.20 | 2.06 | 1.95 | 1.89 | 1.83 | 1.79 | 1.75 | 1.72 |
| 39                                   | 2.79                               | 2.40 | 2.19 | 2.05 | 1.94 | 1.88 | 1.82 | 1.78 | 1.74 | 1.71 |
| 40                                   | 2.78                               | 2.39 | 2.18 | 2.04 | 1.93 | 1.87 | 1.81 | 1.77 | 1.73 | 1.70 |
| 41                                   | 2.77                               | 2.38 | 2.17 | 2.03 | 1.92 | 1.86 | 1.80 | 1.76 | 1.72 | 1.69 |
| 42                                   | 2.76                               | 2.37 | 2.16 | 2.02 | 1.91 | 1.85 | 1.79 | 1.75 | 1.71 | 1.68 |
| 43                                   | 2.75                               | 2.36 | 2.15 | 2.01 | 1.90 | 1.84 | 1.78 | 1.74 | 1.70 | 1.67 |
| 44                                   | 2.74                               | 2.35 | 2.14 | 1.99 | 1.88 | 1.82 | 1.76 | 1.72 | 1.68 | 1.65 |
| 45                                   | 2.73                               | 2.34 | 2.13 | 1.98 | 1.87 | 1.81 | 1.75 | 1.71 | 1.67 | 1.64 |
| 46                                   | 2.72                               | 2.33 | 2.12 | 1.97 | 1.86 | 1.80 | 1.74 | 1.70 | 1.66 | 1.63 |
| 47                                   | 2.71                               | 2.32 | 2.11 | 1.96 | 1.85 | 1.79 | 1.73 | 1.69 | 1.65 | 1.62 |
| 48                                   | 2.70                               | 2.31 | 2.10 | 1.95 | 1.84 | 1.78 | 1.72 | 1.68 | 1.64 | 1.61 |
| 49                                   | 2.69                               | 2.30 | 2.09 | 1.94 | 1.83 | 1.77 | 1.71 | 1.67 | 1.63 | 1.60 |
| 50                                   | 2.68                               | 2.29 | 2.08 | 1.93 | 1.82 | 1.76 | 1.70 | 1.66 | 1.62 | 1.59 |
| 51                                   | 2.67                               | 2.28 | 2.07 | 1.92 | 1.81 | 1.75 | 1.69 | 1.65 | 1.61 | 1.58 |
| 52                                   | 2.66                               | 2.27 | 2.06 | 1.91 | 1.80 | 1.74 | 1.68 | 1.64 | 1.60 | 1.57 |
| 53                                   | 2.65                               | 2.26 | 2.05 | 1.90 | 1.79 | 1.73 | 1.67 | 1.63 | 1.59 | 1.56 |
| 54                                   | 2.64                               | 2.25 | 2.04 | 1.89 | 1.78 | 1.72 | 1.66 | 1.62 | 1.58 | 1.55 |
| 55                                   | 2.63                               | 2.24 | 2.03 | 1.88 | 1.77 | 1.71 | 1.65 | 1.61 | 1.57 | 1.54 |
| 56                                   | 2.62                               | 2.23 | 2.02 | 1.87 | 1.76 | 1.70 | 1.64 | 1.60 | 1.56 | 1.53 |
| 57                                   | 2.61                               | 2.22 | 2.01 | 1.86 | 1.75 | 1.69 | 1.63 | 1.59 | 1.55 | 1.52 |
| 58                                   | 2.60                               | 2.21 | 2.00 | 1.85 | 1.74 | 1.68 | 1.62 | 1.58 | 1.54 | 1.51 |
| 59                                   | 2.59                               | 2.20 | 1.99 | 1.84 | 1.73 | 1.67 | 1.61 | 1.57 | 1.53 | 1.50 |
| 60                                   | 2.58                               | 2.19 | 1.98 | 1.83 | 1.72 | 1.66 | 1.60 | 1.56 | 1.52 | 1.49 |
| 61                                   | 2.57                               | 2.18 | 1.97 | 1.82 | 1.71 | 1.65 | 1.59 | 1.55 | 1.51 | 1.48 |
| 62                                   | 2.56                               | 2.17 | 1.96 | 1.81 | 1.70 | 1.64 | 1.58 | 1.54 | 1.50 | 1.47 |
| 63                                   | 2.55                               | 2.16 | 1.95 | 1.80 | 1.69 | 1.63 | 1.57 | 1.53 | 1.49 | 1.46 |
| 64                                   | 2.54                               | 2.15 | 1.94 | 1.79 | 1.68 | 1.62 | 1.56 | 1.52 | 1.48 | 1.45 |
| 65                                   | 2.53                               | 2.14 | 1.93 | 1.78 | 1.67 | 1.61 | 1.55 | 1.51 | 1.47 | 1.44 |
| 66                                   | 2.52                               | 2.13 | 1.92 | 1.77 | 1.66 | 1.60 | 1.54 | 1.50 | 1.46 | 1.43 |
| 67                                   | 2.51                               | 2.12 | 1.91 | 1.76 | 1.65 | 1.59 | 1.53 | 1.49 | 1.45 | 1.42 |
| 68                                   | 2.50                               | 2.11 | 1.90 | 1.75 | 1.64 | 1.58 | 1.52 | 1.48 | 1.44 | 1.41 |
| 69                                   | 2.49                               | 2.10 | 1.89 | 1.74 | 1.63 | 1.57 | 1.51 | 1.47 | 1.43 | 1.40 |
| 70                                   | 2.48                               | 2.09 | 1.88 | 1.73 | 1.62 | 1.56 | 1.50 | 1.46 | 1.42 | 1.39 |
| 71                                   | 2.47                               | 2.08 | 1.87 | 1.72 | 1.61 | 1.55 | 1.49 | 1.45 | 1.41 | 1.38 |
| 72                                   | 2.46                               | 2.07 | 1.86 | 1.71 | 1.60 | 1.54 | 1.48 | 1.44 | 1.40 | 1.37 |
| 73                                   | 2.45                               | 2.06 | 1.85 | 1.70 | 1.59 | 1.53 | 1.47 | 1.43 | 1.39 | 1.36 |
| 74                                   | 2.44                               | 2.05 | 1.84 | 1.69 | 1.58 | 1.52 | 1.46 | 1.42 | 1.38 | 1.35 |
| 75                                   | 2.43                               | 2.04 | 1.83 | 1.68 | 1.57 | 1.51 | 1.45 | 1.41 | 1.37 | 1.34 |
| 76                                   | 2.42                               | 2.03 | 1.82 | 1.67 | 1.56 | 1.50 | 1.44 | 1.40 | 1.36 | 1.33 |
| 77                                   | 2.41                               | 2.02 | 1.81 | 1.66 | 1.55 | 1.49 | 1.43 | 1.39 | 1.35 | 1.32 |
| 78                                   | 2.40                               | 2.01 | 1.80 | 1.65 | 1.54 | 1.48 | 1.42 | 1.38 | 1.34 | 1.31 |
| 79                                   | 2.39                               | 2.00 | 1.79 | 1.64 | 1.53 | 1.47 | 1.41 | 1.37 | 1.33 | 1.30 |
| 80                                   | 2.38                               | 1.99 | 1.78 | 1.63 | 1.52 | 1.46 | 1.40 | 1.36 | 1.32 | 1.29 |
| 81                                   | 2.37                               | 1.98 | 1.77 | 1.62 | 1.51 | 1.45 | 1.39 | 1.35 | 1.31 | 1.28 |
| 82                                   | 2.36                               | 1.97 | 1.76 | 1.61 | 1.50 | 1.44 | 1.38 | 1.34 | 1.30 | 1.27 |
| 83                                   | 2.35                               | 1.96 | 1.75 | 1.60 | 1.49 | 1.43 | 1.37 | 1.33 | 1.29 | 1.26 |
| 84                                   | 2.34                               | 1.95 | 1.74 | 1.59 | 1.48 | 1.42 | 1.36 | 1.32 | 1.28 | 1.25 |
| 85                                   | 2.33                               | 1.94 | 1.73 | 1.58 | 1.47 | 1.41 | 1.35 | 1.31 | 1.27 | 1.24 |
| 86                                   | 2.32                               | 1.93 | 1.72 | 1.57 | 1.46 | 1.40 | 1.34 |      |      |      |

que el mantenimiento dado a las máquinas de al menos 2 de los talleres no es el mismo.

Se va a medir el tiempo que demora cada máquina en realizar un producto.

Se plantea en primer lugar la identificación de las máquinas, como se muestra en la tabla 4.

Tabla 4. Presión máxima de las llantas recomendada por el fabricante y tamaño para los 3 tipos de bicicleta

| ID | Máquina | Proveedor de Mantenimiento |
|----|---------|----------------------------|
| A  | 1       | Empresa A1                 |
| B  | 2       | Empresa B2                 |
| C  | 3       | Empresa C3                 |
| D  | 4       | Empresa D4                 |
| E  | 5       | Empresa E5                 |

Se define en primer lugar la aleatoriedad de las mediciones:

- Se toman 5 mediciones al día del tiempo en minutos que se demora cada máquina en realizar un producto. Se toman los siguientes horarios: 08:00, 11:00, 14:00, 17:00 y 20:00, ver tabla 5.
- Se realiza una medición por máquina al día.
- Las mediciones se realizan durante 5 días.
- Cada día el orden de las mediciones es distinto.

Tabla 5. Diseño de la aleatoriedad de las mediciones

|       | DÍA |   |   |   |   |
|-------|-----|---|---|---|---|
|       | 1   | 2 | 3 | 4 | 5 |
| 8:00  | A   | B | C | D | E |
| 11:00 | B   | A | E | C | D |
| 14:00 | C   | D | B | E | A |
| 17:00 | D   | E | A | B | C |
| 20:00 | E   | C | D | A | B |

El resultado de las mediciones se muestra a continuación:

Tabla 6. Resultados de las mediciones / observaciones efectuadas

|   | Medición en Minutos |       |       |       |       | PROM  |
|---|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
|   | 1                   | 2     | 3     | 4     | 5     |       |
| A | 31.53               | 32.21 | 30.10 | 30.14 | 30.48 | 30.89 |
| B | 30.49               | 30.47 | 31.12 | 28.97 | 29.54 | 30.12 |
| C | 29.58               | 28.87 | 30.15 | 31.01 | 30.12 | 29.95 |
| D | 31.27               | 29.35 | 29.10 | 30.56 | 31.11 | 30.28 |
| E | 29.05               | 30.41 | 31.01 | 30.74 | 28.78 | 30.00 |

Finalmente, para la ejecución de este experimento se va a aplicar la teoría del diseño experimental completamente al azar con el fin de averiguar si existe una influencia del lugar donde se realiza el

mantenimiento con respecto al desempeño de las máquinas.

### 3. Resultados y Discusión

Presentado el cuadro de datos en la sección anterior se presentan los resultados de la ejecución del diseño experimental completamente al azar en esta parte con el fin de obtener conclusiones de este caso de estudio.

En primer lugar, se realiza un recuento de las constantes y variables de cálculo de este diseño.

Tabla 7. Resultados de las mediciones / observaciones efectuadas

|      |      |
|------|------|
| alfa | 0.05 |
| k    | 5    |
| N    | 25   |
| k-1  | 4    |
| N-k  | 20   |

A continuación, se muestra el cuadro resultante de los tratamientos de los datos, el cálculo de la suma por tratamiento, la suma total, el promedio por tratamiento, el promedio global, las desviaciones con respecto a la media global y la varianza.

Tabla 8. Cálculos estadísticos iniciales

| ID           | SUMA   | MEDIA MUESTRAL | Δ     | VARIANZA |
|--------------|--------|----------------|-------|----------|
| A            | 154.46 | 30.89          | 0.65  | 0.87667  |
| B            | 150.59 | 30.12          | -0.13 | 0.72957  |
| C            | 149.73 | 29.95          | -0.30 | 0.62393  |
| D            | 151.39 | 30.28          | 0.03  | 1.00117  |
| E            | 149.99 | 30.00          | -0.25 | 1.03167  |
| SUMA TOTAL   | 756.16 |                |       |          |
| MEDIA GLOBAL | 30.25  |                |       |          |

Es necesario para los cálculos, determinar los cuadrados de los valores y también la suma total de estos cuadrados. Esto se expone en la tabla 9.

Tabla 9. Cálculo de los cuadrados

| ID                   | Medición en Minutos ^ 2 |         |        |        |        |
|----------------------|-------------------------|---------|--------|--------|--------|
| A                    | 994.14                  | 1037.48 | 906.01 | 908.42 | 929.03 |
| B                    | 929.64                  | 928.42  | 968.45 | 839.26 | 872.61 |
| C                    | 874.98                  | 833.48  | 909.02 | 961.62 | 907.21 |
| D                    | 977.81                  | 861.42  | 846.81 | 933.91 | 967.83 |
| E                    | 843.90                  | 924.77  | 961.62 | 944.95 | 828.29 |
| SUMA TOTAL CUADRADOS | 22891.10                |         |        |        |        |

Con estos resultados se puede entonces calcular los valores de suma de cuadrados. Como se explicó anteriormente, existen 3 valores: la suma de cuadrados total, la suma de cuadrados de tratamiento y la del error. Con estos valores es posible determinar los cuadrados medios, el valor del estadístico, y el valor-p que describe la tabla 10.

Tabla 10. Resultados preliminares y cálculo de los estadísticos

| SUMA DE CUADRADOS |        |
|-------------------|--------|
| SC-total          | 19.98  |
| SC-tratamiento    | 2.93   |
| SC-error          | 17.05  |
| CUADRADOS MEDIOS  |        |
| CM-tratamiento    | 0.733  |
| CM-error          | 0.853  |
| ESTADÍSTICO       |        |
| Fo                | 0.859  |
| F y valor-p       |        |
| F@4,20            | 2.87   |
| valor-p           | 0.5050 |

El estadístico de comparación F se evalúa con los grados de libertad k-1 igual a 4, y N-k igual a 20. Se obtienen las siguientes conclusiones:

$$valor - p < \alpha$$

$$F_0 < F_{@4,20}$$

Como conclusión preliminar y base de este estudio, se puede determinar que no todas las máquinas son iguales, o su desempeño no es el mismo. Es decir, se rechaza la hipótesis nula.

$$H_0 : \tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_k = 0$$

Se presenta la tabla 11 con el cálculo de la diferencia mínima significativa.

Tabla 11. Cálculo de la diferencia mínima significativa LSD

| Cálculo del LSD con alfa = 0.05 |             |
|---------------------------------|-------------|
| alfa                            | 0.05        |
| N                               | 25          |
| k                               | 5           |
| SC-error                        | 17.05       |
| n                               | 5           |
| t de Student                    | 2.085963447 |
| LSD                             | 5.447846483 |

La t de Student fue evaluada con alfa dividido para dos, ó 0.025 y con 25-5 igual a 20 grados de libertad. El valor se puede obtener de la tabla expuesta en la sección anterior.

Obtenido este valor, se puede realizar un cuadro comparativo de la diferencia de medias poblacionales con el valor del LSD. La diferencia se expresa en términos de su valor absoluto, y en caso de ser menor al valor del LSD, entonces, esta diferencia se considera no significativa, tal como evidencia la tabla 12.

Tabla 12. Cuadro comparativo de la diferencia de medias poblacionales con la diferencia mínima significativa LSD

| COMPARACIÓN DE MEDIAS CON LSD |                |             |                  |
|-------------------------------|----------------|-------------|------------------|
| DIF. POBL.                    | DIF. DE MEDIAS | LSD         | DECISIÓN         |
| A-B                           | 0.774          | 5.447846483 | NO SIGNIFICATIVA |
| A-C                           | 0.946          | 5.447846483 | NO SIGNIFICATIVA |
| A-D                           | 0.614          | 5.447846483 | NO SIGNIFICATIVA |
| A-E                           | 0.894          | 5.447846483 | NO SIGNIFICATIVA |
| B-C                           | 0.172          | 5.447846483 | NO SIGNIFICATIVA |
| B-D                           | 0.16           | 5.447846483 | NO SIGNIFICATIVA |
| B-E                           | 0.12           | 5.447846483 | NO SIGNIFICATIVA |
| C-D                           | 0.332          | 5.447846483 | NO SIGNIFICATIVA |
| C-E                           | 0.052          | 5.447846483 | NO SIGNIFICATIVA |
| D-E                           | 0.28           | 5.447846483 | NO SIGNIFICATIVA |

Se presenta también los cálculos de la verificación de la normalidad en las observaciones de la tabla 13.

Tabla 13. Cálculos para la verificación de la normalidad

| VERIFICACIÓN DE LA NORMALIDAD |         |           |           |
|-------------------------------|---------|-----------|-----------|
| DATO ri                       | Rango i | (i-0.5)/N | Score Zi  |
| 28.78                         | 1       | 0.02      | -2.053749 |
| 28.87                         | 2       | 0.06      | -1.554774 |
| 28.97                         | 3       | 0.10      | -1.281552 |
| 29.05                         | 4       | 0.14      | -1.080319 |
| 29.10                         | 5       | 0.18      | -0.915365 |
| 29.35                         | 6       | 0.22      | -0.772193 |
| 29.54                         | 7       | 0.26      | -0.643345 |
| 29.58                         | 8       | 0.30      | -0.524401 |
| 30.10                         | 9       | 0.34      | -0.412463 |
| 30.12                         | 10      | 0.38      | -0.305481 |
| 30.14                         | 11      | 0.42      | -0.201893 |
| 30.15                         | 12      | 0.46      | -0.100434 |
| 30.41                         | 13      | 0.50      | 0.000000  |
| 30.47                         | 14      | 0.54      | 0.100434  |
| 30.48                         | 15      | 0.58      | 0.201893  |
| 30.49                         | 16      | 0.62      | 0.305481  |
| 30.56                         | 17      | 0.66      | 0.412463  |
| 30.74                         | 18      | 0.70      | 0.524401  |
| 31.01                         | 19      | 0.74      | 0.643345  |
| 31.01                         | 20      | 0.78      | 0.772193  |
| 31.11                         | 21      | 0.82      | 0.915365  |
| 31.12                         | 22      | 0.86      | 1.080319  |
| 31.27                         | 23      | 0.90      | 1.281552  |
| 31.53                         | 24      | 0.94      | 1.554774  |
| 32.21                         | 25      | 0.98      | 2.053749  |



Figura 11. Gráfica de Probabilidad Normal para las observaciones

Finalmente, se presenta el cuadro de cálculo de los residuos con respecto al promedio de los tratamientos.

Tabla 14. Cálculos de Residuos

| ID | ri    | Promedio | Residuos |
|----|-------|----------|----------|
| A  | 31.53 | 30.89    | 0.638    |
| A  | 32.21 | 30.89    | 1.318    |
| A  | 30.10 | 30.89    | -0.792   |
| A  | 30.14 | 30.89    | -0.752   |
| A  | 30.48 | 30.89    | -0.412   |
| B  | 30.49 | 30.12    | 0.372    |
| B  | 30.47 | 30.12    | 0.352    |
| B  | 31.12 | 30.12    | 1.002    |
| B  | 28.97 | 30.12    | -1.148   |
| B  | 29.54 | 30.12    | -0.578   |
| C  | 29.58 | 29.95    | -0.366   |
| C  | 28.87 | 29.95    | -1.076   |
| C  | 30.15 | 29.95    | 0.204    |
| C  | 31.01 | 29.95    | 1.064    |
| C  | 30.12 | 29.95    | 0.174    |
| D  | 31.27 | 30.28    | 0.992    |
| D  | 29.35 | 30.28    | -0.928   |
| D  | 29.10 | 30.28    | -1.178   |
| D  | 30.56 | 30.28    | 0.282    |
| D  | 31.11 | 30.28    | 0.832    |
| E  | 29.05 | 30.00    | -0.948   |
| E  | 30.41 | 30.00    | 0.412    |
| E  | 31.01 | 30.00    | 1.012    |
| E  | 30.74 | 30.00    | 0.742    |
| E  | 28.78 | 30.00    | -1.218   |



Figura 12. Gráfico comparativo de los residuos

## 4. Conclusiones

Se puede asegurar de en este caso de estudio la aleatoriedad del proceso experimental. Las mediciones se las tomaron de manera arbitraria sin ningún tipo de preferencia y durante un horario programado.

A primera vista según los cuadros de resultados de las observaciones, se puede sugerir que el tiempo promedio de cada máquina es de 30 minutos aproximadamente. Sin la realización del estudio estadístico aparentemente no existe una diferencia marcada entre cada una de las máquinas.

Las medias muestrales igualmente oscilan en un aproximado de 30 minutos.

La varianza para cada uno de los tratamientos oscila entre 0 y 1 y aparentemente no existe una disparidad entre los datos.

Sin embargo, mediante el cálculo del estadístico y el valor p se concluye finalmente que, aunque aparentemente las diferencias no parecen tan significativas, los tratamientos no son los mismos, y, en otras palabras, el rendimiento u operatividad de todas las máquinas no es el mismo.

La investigación da un paso más adelante con el cálculo de la diferencia mínima significativa. Al comparar la diferencia de medias poblacionales con este valor LSD se puede concluir que si bien es cierto puede existir una diferencia entre los tratamientos, esta no es muy significativa. La mayor diferencia se da entre las máquinas A y C, aunque al ser un valor muy por debajo del LSD no se le puede dar mucha relevancia.

Los supuestos fueron verificados. Por un lado, la aleatoriedad como se indicó previamente ha sido asegurada. En segundo lugar, la normalidad de los datos se puede atestiguar en la gráfica de probabilidad normal donde la línea de tendencia de los datos tiene un coeficiente R cuadrado de 0.97 cercano a 1, lo cual aproxima de gran manera la tendencia de línea recta de esta gráfica, que a su vez asegura la normalidad.

El gráfico de residuos, el tercer supuesto, es expuesto al final. En él se puede observar ningún tipo de patrón extraño o repetitivo, con esto se puede finalmente concluir que la varianza es constante en los tratamientos.

Se define de esta manera el proceso de análisis del experimento. En primer lugar, la preparación del experimento en sí, en segundo lugar, la ejecución para luego realizar el procesamiento de los datos y finalmente la comprobación de los supuestos. De esta manera, se puede finalizar este caso de estudio al exponer que si bien es cierto todas las máquinas no tienen el mismo comportamiento, debido posiblemente al proveedor de mantenimiento de cada una de ellas, la diferencia existente no puede considerarse significativa.

## 5. Referencias

- [1] H. Gutierrez Pulido y R. Salazar, Análisis y diseño de experimentos, vol. Segunda Edición, México: McGraw-Hill Interamericana, 2008.
- [2] V. Yépez, «Definiciones básicas del diseño de experimentos,» Universitat Politècnica de Valencia, 15 06 2019. [En línea]. Available: <https://victoryepes.blogs.upv.es/2013/04/24/definiciones-basicas-del-diseno-de-experimentos/>.
- [3] Universidad de las Américas Puebla - UDLA, «4. TEORÍA DE DISEÑO DE EXPERIMENTOS,» Catarina - UDLA - Puebla, 20 03 2019. [En línea]. Available: [http://catarina.udlap.mx/u\\_dl\\_a/tales/documentos/lem/florian\\_m\\_a/capitulo4.pdf](http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lem/florian_m_a/capitulo4.pdf).
- [4] Escolares.net, «Conceptos de Estadística,» Escolares, 20 05 2019. [En línea]. Available: <https://www.escolares.net/matematicas/conceptos-de-estadistica/>.
- [5] catarina.udlap, «Capítulo 6: Diseño Experimental,» Universidad de las Américas Puebla, 18 04 2019. [En línea]. Available: [http://catarina.udlap.mx/u\\_dl\\_a/tales/documentos/lii/granados\\_m\\_d/capitulo6.pdf](http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lii/granados_m_d/capitulo6.pdf).
- [6] minitab, «¿Qué es la aleatorización?,» support.minitab, 10 03 2019. [En línea]. Available: <https://support.minitab.com/es-mx/minitab/19/help-and-how-to/modeling-statistics/doe/supporting-topics/basics/what-is-randomization/>.
- [7] StatisticsHowTo, «ANOVA Test: Definition, Types, Examples,» DataScienceCentral, 1 02 2019. [En línea]. Available: <https://www.statisticshowto.datasciencecentral.com/probability-and-statistics/hypothesis-testing/anova/>.
- [8] A. M. Lara Porras, «Diseño Estadístico de Experimentos,» Universidad de Granada (España), 13 01 2019. [En línea]. Available: <https://www.ugr.es/~bioestad/guiaspss/practica7/Contenidos.pdf>.
- [9] UNAM MX, «Diseño Completamente al Azar,» DPYE IIMAS, 10 01 2020. [Online]. Available: [http://www.dpye.iimas.unam.mx/patricia/indexer/completamente\\_al\\_azar](http://www.dpye.iimas.unam.mx/patricia/indexer/completamente_al_azar).
- [10] Addlink Software Científico, «Comprendamos las pruebas de hipótesis, niveles de significancia alfa y p valores en estadística,» addlink, 30 12 2020. [Online]. Available: <https://www.addlink.es/noticias/minitab/2873-comprendamos-las-pruebas-de-hipotesis-niveles-de-significacion-alfa-y-p-valores-en-estadistica>.
- [11] J. Salinas, «ANOVA Análisis de Varianza,» UGR ES, 30 01 2020. [Online]. Available: <https://www.ugr.es/~jsalinas/apuntes/Anova.pdf>.
- [12] Scientific European Federation, «Distribución t Student,» Osteopaths, 01 01 2019. [Online]. Available: [https://www.scientific-european-federation-osteopaths.org/wp-content/uploads/2019/01/Distribucion\\_tStudent.pdf](https://www.scientific-european-federation-osteopaths.org/wp-content/uploads/2019/01/Distribucion_tStudent.pdf). [Accessed 20 02 2020].
- [13] J. A. Mellado Bosque, «Distribución F,» UAAAN MX, 15 01 2020. [Online]. Available: <http://www.uaaan.mx/~jmelbos/tablas/distf.pdf>.
- [14] IDEAS, «Image Data Exploration and Analysis Software User's Manual,» Amnis Corporation, 01 07 2010. [En línea]. Available: [https://med.virginia.edu/flow-cytometry-facility/wp-content/uploads/sites/170/2015/10/Amnis-ImageStream-IDEAS-4\\_0-Manual.pdf](https://med.virginia.edu/flow-cytometry-facility/wp-content/uploads/sites/170/2015/10/Amnis-ImageStream-IDEAS-4_0-Manual.pdf).

## 6. Biografía



<sup>1</sup>Eliana Morillo. – Magíster en Dirección Industrial (Universidad de Buenos Aires), Becaria Universidades de Excelencia 2014 (Secretaría de Educación Superior, Ciencia, Tecnología e Innovación de la República del Ecuador), Ingeniera Automotriz (Universidad de Fuerzas Armadas ESPE).



<sup>2</sup>Sebastián Silva. – Master of Science in Mechatronics (Technische Universität Hamburg – Harburg), Máster en Administración de Empresas (MBA) con mención en Calidad y Productividad (Pontificia Universidad Católica del Ecuador), Ingeniero Mecánico (Escuela Politécnica Nacional). Inspector de calidad de partes de aviones y equipo de soporte en tierra Airbus con la empresa DB Schenker en Hamburgo, Alemania.

| REGISTRO DE LA PUBLICACIÓN |               |
|----------------------------|---------------|
| Fecha recepción            | 13 marzo 2020 |
| Fecha aceptación           | 13 mayo 2020  |