DESARROLLO DE UN MÓDULO DIDÁCTICO EN MATLAB PARA EL ANÁLISIS Y EXPANSIÓN DE LAS SERIES DE TAYLOR Y LAURENT

DEVELOPMENT OF A DIDACTIC MODULE IN MATLAB FOR THE ANALYSIS AND EXPANSION OF THE TAYLOR AND LAURENT SERIES

Wilson Román [1], Norma Barreno [2]
[1,2] Universidad de Fuerzas Armadas ESPE – Departamento de Ciencias Exactas, Quijano y Ordoñez y Marques de Maenza s/n.
e – mail : [1] wmroman@espe.edu.ec [2] npbarreno@espe.edu.ec

Revista Energía Mecánica Innovación y Futuro, V Edición 2016, No. 7 (15)

RESUMEN

En la formación académica del estudiante de ingeniería uno de los objetivos se orienta en la formulación de modelos matemáticos, ya sean físicos, mecánicos, eléctricos, etc., y estos a su vez tienen una representación formal mediante ecuaciones diferenciales las mismas que necesitan ser resueltas para buscar solución a los problemas planteados, uno de los métodos de solución es la utilización de las series de potencias donde las Series de Taylor y Laurent son sus representantes principales.

Se presenta el desarrollo de un módulo didáctico para analizar y expandir las Series de Taylor y Laurent utilizando MuPAD para el cálculo simbólico y la interfaz gráfica de MatLab para la presentación de resultados, el módulo didáctico se fundamenta en la necesidad de contar con una herramieta informática que permita la representación de una función compleja mediante series de potencia, en las que se visualice los términos de la expansión en serie y la representación gráfica del círculo de convergencia de la serie.

El software Matlab es una herramienta de altas prestaciones para cálculo numérico y visualización, pero no muy fuerte en el cálculo simbólico, de ahí la importancia del presente artículo.

Palabras clave

Serie de Taylor, Serie de Laurent, módulo didáctico, Matlab.

ABSTRACT

In the academic formation of the student of engineering one of the objectives are oriented in the formulation of the mathematical models, be they physical, mechanical, electrical, etc., and these have in turn have a formal representation by means of differential equations that they need to be To find the solution to the problems posed, one of the solution methods is the use of the series of powers where the Taylor and Laurent series are their main events.

The development of a didactic module to analyze and expand the Taylor and Laurent series using MuPAD for the symbolic calculation and the MatLab graphical interface for the prediction of results is presented, the didactic module is based on the need to have a computer tool It allows the representation of a complementary function through the series of power, in which the terms of the expansion in series and the graphical representation of the circle of convergence of the series are displayed.

Matlab software is a tool of high performance for numerical calculation and visualization, but not very strong in the symbolic calculation, hence the importance of this article.

Keywords

Taylor series, Laurent series, didactic module, Matlab.

1. INTRODUCCIÓN

La matemática constituye el pilar fundamental de la formación de un ingeniero; concibiendo a la misma como la ciencia que contribuye al análisis, la criticidad, la reflexión y la argumentación que requiere un estudiante para dar soporte a las otras ciencias.

En el campo de la modelación matemática así como en la solución de ecuaciones diferenciales una de las estrategias consiste en representar funciones reales y complejas mediante series de potencias, dentro de ellas la de mayor relevancia son: la Serie de Taylor que aproxima únicamente funciones analíticas; y la Serie de Laurent que surge a partir del análisis de funciones no analíticas en un punto; es decir, La Serie de Laurent constituye una generalización de la Serie de Taylor.

El trabajar con funciones de variable compleja implica el desarollo de un módulo didáctico utilizando MadPAD de MatLab con la finalidad de contribuir en la revisión conceptual de temas como función de variable compleja, diferenciabilidad, funciones analíticas, cálculo de integrales en el campo complejo, identificación de puntos ordinarios y singulares de las funciones de variable compleja analizando su desarrollo en Serie de Laurent, aplicando en la resolución de problemas de ingeniería.

2. FUNDAMENTO TEÓRICO

La Serie de Laurent es una serie de potencias con exponentes enteros positivos y negativos, en tanto que la Serie de Taylor es una serie solo con exponentes enteros no negativos, se comprueba que las series de Laurent permiten caracterizar los diferentes tipos de singularidades aisladas, y se concluye con una aplicación en Matlab que muestra como hallar los términos de Laurent de algunas funciones concretas.

2.1 Series de Taylor

Una serie de Taylor es una aproximación de funciones mediante una serie de potencias o suma de potencias enteras de polinomios se calcula a partir de las derivadas de la función para un determinado valor o punto es suficientemente derivable sobre la función y un entorno sobre el cual converja la serie. Si esta serie está centrada sobre el punto cero, se le denomina serie de Maclaurin, $z_0=0$.

Teorema 1.

Sea $f(z)$ una función analítica en un disco abierto $|z-z_0|<R$, centrado en z_0 y de radio R. Entonces, en todo punto z de ese disco admite $f(z)$ una representación en serie de potencia. [1]

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \qquad \text{Ec.1}$$

Donde:
a_n= son los coeficientes
z = un punto del plano ¢.
z_0 = centro del entorno.

Luego, una serie de potencia puede derivarse término a término en el interior de su círculo de convergencia, es decir:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n (z-z_0)^{n-1}$$

$$f''(z)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (z-z_0)^{n-2}$$

$$f'''(z)=\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n (z-z_0)^{n-3}$$

Derivando sucesivamente, se tiene:

$$f^{(n)}=n!\,a_n$$

Despejando el coeficiente a_n y remplazándole en la ec. (1) se tiene la formulación del siguiente teorema.

Teorema 2 [Teorema de Taylor]

Sea $f(z)$ una función analítica en un disco abierto $|z-z_0|<R$, centrado en z_0 y de radio R. Entonces, $f(z)$ tiene la representación en serie de potencias [2].

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad \text{Ec.2}$$

Ejemplos:

Expanda $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ en una serie de Taylor de centro $z_0=2i$

Resolución:

Derivando:

$$F(z)=\frac{1}{1-z}$$

$$f'(z)=-\frac{1}{(1-z)^2}$$

$$f''(z)=\frac{2}{(1-z)^3}$$

$$f'''(z)=-\frac{2(3)}{(1-z)^4}$$

Se concluye:

$$f^{(n)}(2i)=\frac{n!}{(1-i)^{(n+1)}}$$

La serie de Taylor seria:

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-2i)^{n+1}}(z-2i)^{n+1}$$

2.2 Series de Laurent

Función Holomorfa

Una función f es holomorfa en un punto z_0 si es derivable en todos los puntos de $z \in h$.

Las series de Laurent son una buena generalización de las series de Taylor, considerando que Taylor trabaja solamente con funciones analíticas en tanto que Laurent aborda funciones analíticas y no analíticas.

Teorema 3

Sea f analítica dentro del dominio anular D definido por $|z-z_0|<R$. Entonces f tiene la representación en serie de potencias.

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n \qquad \text{Ec.3}$$

Ejemplos:

1.Expanda $f(z)=\dfrac{1}{z(1-z)}$ en una serie de Laurent válida para $1<|z-2|<2.$

Resolución:

$$f(z)=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}=f_1(z)+f_2(z)$$

$$f_1(z)=-\frac{1}{z}=-\frac{1}{2+z-2}=-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}$$

$$=-\frac{1}{2}\left[1-\frac{z-2}{2}+\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{z-2}{2^2}-\frac{(z-2)^3}{2^3}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS DE LA ENERGÍA Y MECÁNICA

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS
INNOVACIÓN PARA LA EXCELENCIA

ENERGÍA MECÁNICA INNOVACIÓN Y FUTURO
No. 5 Vol. 1 / 2016 (15) ISSN 1390 - 7395 (7/15)

$$f_2(z) = \frac{1}{z-1} = \frac{1}{1+z-2}$$
$$= \frac{1}{z-2}\frac{1}{1+\frac{1}{z-2}}$$
$$= \frac{1}{z-2}\left[1-\frac{1}{z-2}+.....\right]$$
$$= \frac{1}{z-2}-\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{1}{(z-2)^3}+.....$$

La serie es:

$$f(z) = ...-\frac{1}{(z-2)^2}+\frac{1}{z-2}-\frac{1}{2}+\frac{z-2}{2^2}-\frac{(z-2)^2}{2^3}+...$$

2.3 Ceros y Polos

Clasificación de los puntos singulares aislados

Un punto singular aislado $z=z_0$ de una función compleja f se clasifica dependiendo de, si la parte principal de su expansión de Laurent contiene un cero, un número finito o un número infinito de términos.

Si la parte principal es cero, esto es, todos los coeficientes a_k son cero, entonces $z=z_0$ se denomina una singularidad removible.

Si la parte principal contiene un número finito de términos no nulos, entonces $z=z_0$ se denomina un polo. Si, para este caso, el último coeficiente no nulo es a_{-n} donde n≥1, se dice entonces que $z=z_0$ es un polo de orden n.

Si la parte principal contiene un número finito de términos no nulos, entonces $z=z_0$ se denomina singularidad esencial.

2.4 Residuos

Si una función compleja f(z) tiene un polo en el punto $z=z_0$ entonces el coeficiente a_{-1} del término $\frac{1}{z-z_0}$ en la expansión en serie de Laurent de f(z) alrededor de es $z=z_0$ es llamado el residuo de f(z) en el punto $z=z_0$ [2].

Teorema 4

Se considera el caso cuando f(z) tiene un polo simple en $z=z_0$.
Esto implica, de la definición de polo simple, que:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1(z-z_0)+...$$

$$c < |z-z_0| < R$$

en un anillo apropiado. Al multiplicar por $z=z_0$ se tiene:

$$(z-z_0)f(z) = a_{-1}+a_0(z-z_0)+...$$

que es una expansión en serie de Taylor de $(z-z_0)f(z)$. Si z tiende a z_0 entonces se obtiene el resultado, residuo en a, polo simple en:

$$z_0 = \lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)] = a_{-1} \qquad Ec.4$$

Entonces este límite da una forma para calcular el resíduo en un polo simple.

Pero si f(z) tiene un polo de orden m en $z=z_0$, primero se multiplica f(z) por $(z-z_0)^m$. Si m≥2 entonces hay que derivar tantas veces como sea necesario (esto es, m-1 veces) para hacer a_{-1} el primer término, sin el factor $z=z_0$.

Teorema 5

La fórmula general para el residuo de un polo de orden m es:

$$\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]\right\} \qquad Ec.5$$

donde el factor (m-1)! surge cuando el término $a_{-1}(z-z_0)^m-1$ es derivado m-1 veces.

Ejemplo:

Determine el residuo de:

$$f(z)=\frac{2z}{(z^2+1)(2z-1)}$$

en cada uno de sus polos en el plano finito z.

Resolución:
Factorizando el denominador se tiene

$$f(z)=\frac{2z}{(z-j)(z+j)(2z-1)}$$

asi que f(z) tiene polos simples en z=j,-j y $z=\frac{1}{2}$.

Por la Ecuación 4, se obtiene el residuo en z=j

$$=\lim_{z\to j}(z-j)\frac{2z}{(z-j)(z+j)(2z-1)}$$
$$=\frac{2j}{2j(2j-1)}$$
$$=-\frac{1+2j}{5}$$

Se obtiene el residuo en z=-j

$$=\lim_{z\to -j}(z+j)\frac{2z}{(z-j)(z+j)(2z-1)}$$
$$=\frac{-2j}{-2j(-2j-1)}$$
$$=-\frac{1-2j}{5}$$

Obtenemos el residuo en $z=\frac{1}{2}$.

$$=\lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{2z}{(z-j)(z+j)\left(z-\frac{1}{2}\right)}$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{1}{2}-j\right)\left(\frac{1}{2}\right)+j}$$
$$=-\frac{2}{5}$$

Nótese en este caso la importancia de expresar 2z-1 como $2\left(z-\frac{1}{2}\right)$.

3. APLICACIONES

Series de Taylor

3.1 Aproximación de funciones mediante polinomios

Al realizar una aproximación con una serie de Taylor se realiza una suma finita; Es decir, escoger el grado hasta el que se desarrollará el polinomio.
La exactitud de la aproximación aumenta con el grado de la serie.

Se obtiene una aproximación de la función por medio del polinomio de Taylor de grado 2 en z=8.

Así, derivar y evaluar con z=8

$$f(z)=\sqrt[3]{z}$$
$$(z)=x^{\frac{1}{3}}\Rightarrow f(8)=2$$
$$f'(z)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Rightarrow f'(8)=\frac{1}{12}$$
$$f'(z)=\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}\Rightarrow f'(8)=\frac{1}{12}$$
$$f''(z)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}\Rightarrow f''(8)=-\frac{1}{144}$$

En estos términos, el polinomio de Taylor de segundo grado es:

$$T_2(z)=f(8)+\frac{f'(8)}{1!}(x-8)+\frac{f''(8)}{2!}!(x-8)^2$$

3.2 Estimación de integral definida

Usar una serie de potencias para calcular un valor aproximado de:

$$\int_0^1 e^{-z^2}dz$$

La serie de la función e^z es sencilla de hallar.

Para hallar la serie de e^{-z^2} lo más recomendable y para simplificar cálculos se sustituyen z por $-z^2$ en la serie de la función conocida y se obtiene [4].

$$e^{-z^2} = 1 - z^2 + \frac{z^4}{2}! - \frac{z^6}{3}! + \frac{z^6}{4}! - \ldots$$

Al reemplazar la serie en la integral, se tiene:

$$\int_0^1 e^{-z^2} dz = \left[z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5.2!} - \frac{z^7}{7.3!} + \frac{z^9}{9.4!} - \ldots\right]_0^1$$
$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \ldots$$

Sumando los cuatro primeros términos se tiene [4].

$$\int_0^1 e^{-z^2} dz \approx 0,74$$

3.3 Cálculos de límites

Otra aplicación de las series de Taylor es el cálculo de límites

Ejemplo:

Evaluar:

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$$

como

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

entonces

$$\lim_{z \to 0} \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$$
$$= \lim_{z \to 0} \frac{\left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots\right) - 1 - z}{z^2}$$
$$= \lim_{z \to 0} \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} + \frac{z^3}{5!} + \ldots\right)$$
$$= \frac{1}{2}$$

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \frac{y'''(x_0)(x - x_0)^3}{3!} + \ldots$$

3.4 Resolución de ecuaciones diferenciales:

Sea la ecuación diferencial ordinaria y el valor inicial: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

La integral está dada por la aproximación de y=y(x)

$$y(x) \approx y(x_0) + f(x_0 . y_0)(x - x_0) + \frac{f'(x_0 . y_0)(x - x_0)^2}{2!} + \frac{f''(x_0 . y_0)(x - x_0)^3}{3!} + \ldots$$

Se puede aproximar la solución de la ecuación diferencial (función) para un punto cercano al valor inicial, centrando una serie de Taylor en el valor inicial en este punto.

Residuos

Tiene aplicaciones en matemática aplicada y física.

Es útil para cálculo de varios tipos de integrales reales. Como:

Integrales de la forma:

$$\int_0^{2\pi} f\,(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$$

Integrales impropias:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

4. RESULTADOS Y PROGRAMA EN MATLAB

Se realiza el programa Matlab utilizando MuPAD y Guide con el objetivo de obtener las expansiones en series de Taylor y Laurent, una vez que el usuario ingrese la función analítica a ser analizada.

La programación es orientada con la finalidad de tener un cálculo simbólico coherente con los resultados que el estudiante debe alcanzar al desarrollar sus ejercicios en su cuaderno de apuntes.

A continuación, se presenta los resultados de los trabajos realizados.

Serie de Taylor

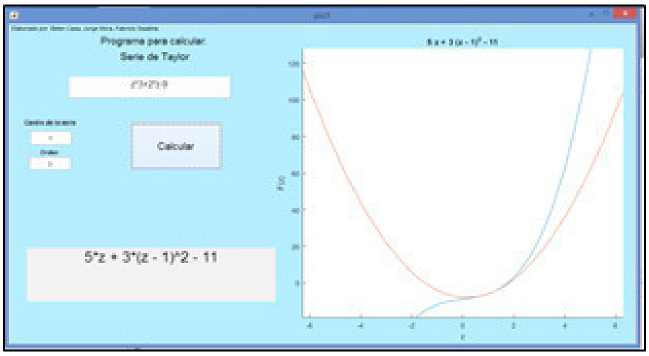

Figura 1. Interfaz para la aproximación de una función mediante Serie de Taylor

Serie de Laurent

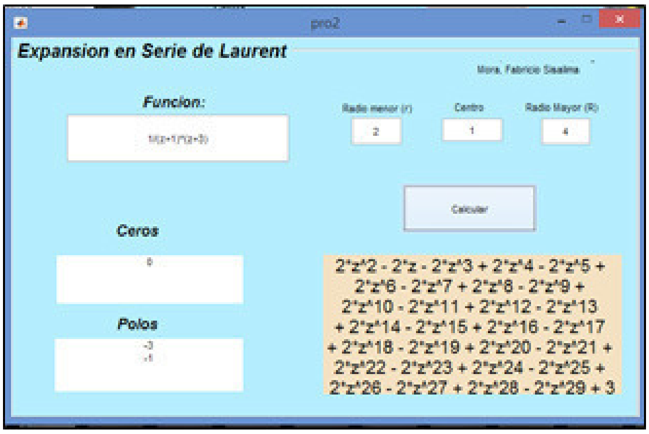

Figura 2. Interfaz que muestra la expansión en Serie de Laurent

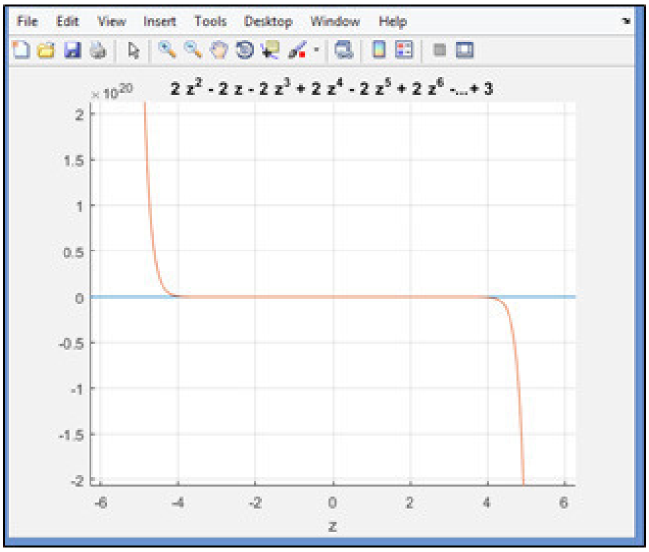

Figura 3. Interfaz para la expansión de la serie.

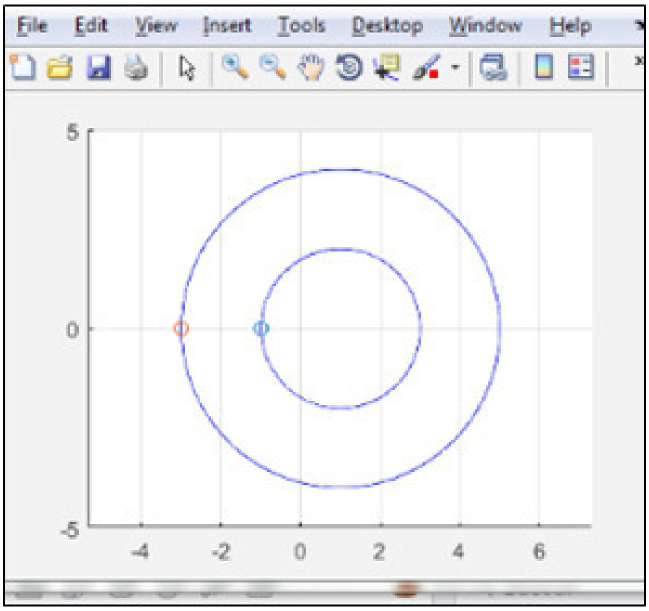

Figura 4. Interfaz para visualizar el círculo de convergencia y los puntos singulares

5. CONCLUSIONES

- Se puede evidenciar que una función puede ser expandida dependiendo del caso en una serie de Taylor o Serie de Laurent.

- El programa de Matlab permite comprobar si la serie obtenida de cualquier tipo de función (analítica o no) es de Taylor o Laurent; además que sus resultados concuerdan con el desarrollo manual realizado por los estudiantes.

- El módulo didáctico facilita el proceso de enseñanza-aprendizaje del estudio de series, polos y residuos en el plano complejo.

6. REFERENCIAS

[1] G. James, Matemáticas Avanzadas para la Ingeniería, Pearson Educación,México, 2da edición, 2002, p. 59.

[2] D. Zill, M. Dewar, Matemática avanzada para la ingeniería 2, McGraw-Hill, 2008, pp. 489-504.

[3] P. O´Neil, Matemática Avanzada para la ingeniería 2, Mc. Graw Hill, 2008, pp. 489 - 504.

[4] L. Sanguña,A. Garces, C. Caguana, B. Ausay, Aplicaciones de Series de Taylor y Maclauri, [online]. Disponible en: http://documents.tips/documents/cionesdeseriesdetaylorymaclaurin.html.

7. BIOGRAFÍA

[1]Wilson Marcelo Román Vargas
Doctor en Matemática, Magíster en Matemática Aplicada, Magíster en Informática Aplicada, Diplomado en Estadística Informática, Diplomado en Gestión del Aprendizaje Universitario, Docente tiempo completo del Departamento de Ciencias Exactas de la ESPE Extensión Latacunga.

[2]Norma del Pilar Barreno Layedra
Ingeniera en sistemas, Magister en Matemática Básica, Diplomado en Docencia matemática, Docente tiempo parcial del Departamento de Ciencias Exactas de la ESPE Extensión Latacunga.

REGISTRO DE LA PUBLICACIÓN	
Fecha recepción	28 julio 2016
Fecha aceptación	19 diciembre 2016