

# Procedimiento para efectuar una Clasificación Ascendente Jerárquica de un Conjunto de Puntos utilizando el Método de Ward

## Process to carry out an Ascendant Hierarchical Classification of a Set of Points using the Ward method

Patricio Espinel

Departamento de Eléctrica y Electrónica,  
Universidad de la Fuerzas Armadas ESPE Extensión Latacunga  
[gpespinel@espe.edu.ec](mailto:gpespinel@espe.edu.ec)

**Recibido:** Agosto 2015, **Publicado:** Diciembre 2015

**Resumen**— Se presenta un procedimiento de clasificación jerárquica de un conjunto de objetos, donde para el análisis de clusters se utiliza el método Ward, que permite medir la distancia entre grupos para producir las agrupaciones y conformar una representación gráfica en forma de árbol o dendrograma. Se crea el dendrograma para resumir el proceso agrupación y permitir observar los cambios de varianza más significativos. Se consigue una partición del conjunto de puntos cortando el dendrograma mediante una línea horizontal donde se observen saltos importantes entre los grupos. Se describen los pasos para garantizar la conformación de los conglomerados en la herramienta de software Matlab, y se ilustra el procedimiento de construcción de un dendrograma y su significado con un ejemplo.

**Palabras Claves**— Agrupación jerárquica, método de Ward, distancia de Ward, dendrograma, árbol de clasificación.

**Abstract**— A process of hierarchical classification of a group of objects is studied, where the clusters analysis uses the Ward method. This method allows to measure the distance among the points to produce the grouping and plot a graphic representation in the shape of a tree or dendrogram. This dendrogram summarizes the grouping process and shows the meaningful variance changes. The set of points could be cropped in the dendrogram using a horizontal line in order to observe important variations among the groups. All the necessary steps to generate sets are described using the software Matlab. Finally, the process of construction of a dendrogram is demonstrated through a meaningful example.

**Keywords**— Hierarchical cluster, Ward method, distance, dendrogram, classifying tree.

### I. INTRODUCCIÓN

Los llamados métodos jerárquicos tienen por objetivo agrupar un conjunto de objetos individuales (animales, plantas, etc.) para formar un nuevo grupo o bien separar alguno ya existente para dar origen a otros dos, de tal forma que, si sucesivamente se va efectuando este proceso de

aglomeración o división, se minimice alguna distancia o bien se maximice alguna medida de similitud. Los métodos jerárquicos se subdividen en aglomerativos y divisivos. Cada una de estas categorías presenta una gran diversidad de variantes.

Los aglomerativos comienzan el análisis con tantos grupos como individuos haya en el estudio. A partir de ahí se van formando grupos de forma ascendente, hasta que, al final del proceso, todos los casos están englobados en un mismo conglomerado. Los métodos divisivos o disociativos realizan el proceso inverso al anterior. Empiezan con un conglomerado que engloba a todos los individuos. A partir de este grupo inicial se van formando, a través de sucesivas divisiones, grupos cada vez más pequeños. Al final del proceso se tienen tantos grupos como individuos en la muestra estudiada [1].

Para fijar ideas, centrémonos en los métodos aglomerativos. Sea en el conjunto de individuos de la muestra, de donde resulta el nivel  $K = 0$ , con  $n$  grupos. En el siguiente nivel se agruparán aquellos dos individuos que tengan la mayor similitud (o menor distancia), resultando así  $n - 1$  grupos; a continuación, y siguiendo con la misma estrategia, se agruparán en el nivel posterior, aquellos dos individuos (o grupos ya formados) con menor distancia o mayor similitud; de esta forma, en el nivel  $L$  tendremos  $n - L$  grupos formados. Si se continúa agrupando de esta forma, se llega al nivel  $L = n - 1$  en el que solo hay un grupo, formado por todos los individuos de la muestra.

Esta manera de formar nuevos grupos tiene la particularidad de que si en un determinado nivel se agrupan dos clases, éstas quedan ya jerárquicamente agrupadas para el resto de los niveles. Los métodos jerárquicos permiten la construcción de un árbol de clasificación, que recibe el nombre de dendrograma, en el cual se puede continuar de forma gráfica el procedimiento de unión seguido, mostrando que grupos se van uniendo, en qué nivel concreto lo hacen.

La forma general de operar de estos métodos es bastante simple. Por ejemplo, en los métodos aglomerativos se parte de tantos grupos como individuos haya. A continuación se selecciona una medida de similitud, agrupándose los dos grupos con mayor similitud. Así se continúa hasta que:

- Se forma un solo grupo.
- Se alcanza el número de grupos prefijado.
- Se detecta, a través de un contraste de significación, que hay razones estadísticas para no continuar agrupando clases, ya que los más similares no son lo suficientemente homogéneos como para determinar una misma agrupación [1].

En resumen, el método de clasificación jerárquica comienza de manera que en cada etapa o nivel se forma un grupo. En el nivel inicial, la distancia entre individuos viene dada por la distancia de Ward o por la distancia Euclídea, pero cuando más adelante se trata de unir grupos hay que especificar qué regla de agregación se va a utilizar. En nuestro caso, utilizaremos el método de Ward [2]. Este método utiliza una aproximación al análisis de la varianza para evaluar la distancia entre grupos, intentando minimizar la suma de los cuadrados de los residuos de cada dos hipotéticos grupos que pueden ser formados en cada paso. Su representación gráfica es un dendrograma [3].

El documento está organizado de la siguiente manera: en la Sección 2 el fundamento de los métodos de clasificación y el procedimiento para obtener el dendrograma es presentado. El análisis de los resultados obtenidos se muestra en la Sección 3. Por último, las conclusiones son descritas en la Sección 4.

## II. MATERIALES Y MÉTODOS

### A. Métodos de Clasificación

Una forma de sintetizar la información contenida en una tabla de datos es mediante la formación de clases o grupos de sujetos o de variables de manera que la variabilidad dentro de los grupos sea inferior a la variabilidad entre grupos, es decir que al interior de los grupos los elementos sean lo más homogéneos posible y que entre grupos se obtenga un alto grado de heterogeneidad [4] [5].

#### 1. Fundamentos de los métodos

Los métodos de análisis de clusters han sido estudiados desde hace muchos años [6] [7] [8]. Los métodos de clasificación se pueden dividir en jerárquicos y no jerárquicos. En los no jerárquicos el número de clases se establece previamente y el algoritmo de clasificación asigna los individuos a las clases, partiendo de algunos valores iniciales y buscando optimizar algún criterio establecido de antemano.

La representación gráfica básica de los métodos de clasificación jerárquicos son los dendrogramas. Estos gráficos muestran la formación de grupos jerárquicos a modo de árbol invertido, así como la distancia entre los

grupos. Un dendrograma representa una serie de particiones embebidas, en donde el número de grupos decrece a medida que se aumenta la altura del árbol. Para obtener alguna clasificación particular se hace un corte en el árbol [9] [10].

Un árbol se puede construir partiendo del tronco (el conjunto de todos los individuos) y haciendo divisiones sucesivas hasta llegar a cada uno de los individuos o partiendo de las ramas terminales (cada uno de los individuos) y haciendo uniones sucesivas hasta llegar a un grupo con todos los individuos. El primer método se denomina clasificación jerárquica divisiva y el segundo clasificación jerárquica aglomerativa o método de Ward, es la que más se usa en la práctica [11] para lograr grupos homogéneos desde el punto de vista estadístico.

#### 2. Clasificación jerárquica con el método de Ward

Los métodos de clasificación jerárquica requieren, además de la distancia entre puntos, una distancia entre grupos de puntos, que se denomina también criterio de agregación y es la que da el nombre al método de clasificación jerárquica. El método de Ward es el que más sentido estadístico tiene, en el caso de variables continuas, pues en cada paso del algoritmo se obtienen grupos de manera que la varianza dentro de los grupos es mínima y por ende la varianza entre los grupos es máxima [9] [10].

#### 3. Distancia de Ward

El método de Ward utiliza la distancia entre conglomerados que cumple con el objetivo de buscar grupos que tengan menos varianza dentro de cada grupo, como criterio de homogeneidad estadística.

Sean A y B dos grupos no vacíos y disjuntos y sean  $p_A$ ,  $p_B$  y  $g_A$ ,  $g_B$  sus pesos y centros de gravedad, respectivamente. La distancia de Ward entre los dos grupos, en función de la distancia euclidiana canónica  $d$ , viene dada por: (la deducción se puede ver en [12]).

$$W(A, B) = \frac{p_A p_B}{p_A + p_B} d^2(g_A + g_B) \quad (1)$$

Este valor es el incremento de la varianza dentro de los grupos al unir los grupos A y B en uno solo, a continuación se observa cómo se encuentra definida la distancia de Ward para dos individuos  $i$  y  $l$  [4].

$$W(i, l) = \frac{p_i p_l}{p_i + p_l} d^2(i, l) \quad (2)$$

Si los pesos son iguales a  $1/n$  para los dos individuos, se tiene que:

$$W(i, l) = \frac{1}{2n} d^2(i, l) \quad (3)$$

#### 4. Formula de recurrencia

El método de Ward tiene la propiedad de ser secuencial, es decir, que es posible calcular la distancia de Ward en un paso de la construcción del árbol en función de las

distancias del paso precedente. Sean A, B y C tres grupos presentes en el mismo paso de construcción del árbol. Si se unen A y B para formar el grupo AB, es necesario calcular la distancia de Ward entre los grupos AB y C. Se conocen las distancias  $W(A, B)$ ,  $W(A, C)$  y  $W(B, C)$ . La distancia  $W(AB, C)$  en función de las anteriores es [11]:

$$W(A \cup B, C) = \frac{(p_A + p_C)W(A,C) + (p_B + p_C)W(B,C) - p_C W(A,C)}{p_A + p_B + p_C} \quad (4)$$

**B. Procedimiento**

La propuesta descrita utiliza como punto de partida un conjunto de puntos homogéneos, a través del cual se efectúa una clasificación ascendente jerárquica donde los elementos terminales del árbol son los individuos del conjunto de partida. El árbol correspondiente se construye según el criterio de Ward, el cual une en cada paso de agregación los dos grupos que incrementen lo menos posible la varianza dentro de los grupos. El árbol o dendrograma que resume el procedimiento de clasificación permite ver la estructura de clases de los individuos que son objeto de análisis, además es más fácil observar los cambios de varianza más grandes (saltos) y decidir el número de grupos [13].

El procedimiento para obtener el árbol de clasificación, utilizando el método de Ward es el siguiente [11]:

1. Calcular las distancias de Ward entre parejas de individuos según la ecuación (2).
2. Seleccionar la pareja de grupos (individuos en el primer paso) que presente la menor distancia de Ward para conformar el nuevo grupo.
3. Calcular las distancias entre todos los grupos y el grupo recién conformado utilizando la ecuación (4) de distancia de Ward o la fórmula de recurrencia.
4. Eliminar las filas y columnas correspondientes a los individuos o grupos unidos y adicionar una fila y una columna para registrar las distancias entre el nuevo grupo y los demás.
5. Repetir el proceso hasta llegar a un solo grupo.

**C. Ejemplo**

Para ilustrar el procedimiento y facilitar la comprensión de los elementos de una clasificación jerárquica con el método de Ward, se hace la clasificación de seis puntos. En la Tabla I se presentan las coordenadas, las frecuencias y los pesos de los puntos:

TABLA I  
COORDENADAS, FRECUENCIAS Y PESOS SOBRE LOS EJES DE LOS PUNTOS

GRUPO	PUNTOS	X1	Y1	Frecuencias	Pesos
1	(0 0)	0	0	1	0.1667
2	(-1 1)	-1	1	1	0.1667
3	(-2 -2)	-2	-2	1	0.1667

4	(1 3)	1	3	1	0.1667
5	(-1 -2)	-1	-2	1	0.1667
6	(1 2)	1	2	1	0.1667

El procedimiento se ilustra utilizando como variables las coordenadas sobre los ejes X e Y, es decir con la información resumida en la Tabla I. La varianza, es decir la suma de las varianzas de las dos variables (X1 y X2) es:  $1.2222 + 3.5556 = 4.7778$ , de acuerdo a la fórmula para la varianza de una población:

$$v^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \mu)^2 \quad (5)$$

Donde N es el tamaño de la población y  $\mu$  es la media aritmética de la población.

*Procedimiento para obtener el árbol de clasificación utilizando el criterio de Ward*

1. Calcular las distancias de Ward entre parejas de puntos según la ecuación (2), las cuales constituyen la matriz de partida para el método de Ward: como ejemplo se calcula la distancia entre los puntos (0 0) y (-1 1):

$$W((0\ 0), (-1\ 1)) = (0.1667 * 0.1667) / (0.1667 + 0.1667) [(0-1)^2 + (0+1)^2] = 0.0834(1+1) = 0.1667$$

La matriz de distancias de Ward entre puntos se muestra en la Tabla II.

TABLA II  
DISTANCIAS DE WARD ENTRE PUNTOS

GRUPO	(0 0)	(-1 1)	(-2 -2)	(1 3)	(-1 -2)	(1 2)
(0 0)	0.0000					
(-1 1)	0.1667	0.0000				
(-2 -2)	0.6667	0.8333	0.0000			
(1 3)	0.8333	0.6667	2.8333	0.0000		
(-1 -2)	0.4167	0.7500	0.0833	2.4167	0.0000	
(1 2)	0.4167	0.4167	2.0833	0.0833	1.6667	0.0000

2. Seleccionar la pareja de puntos que presente la menor distancia de Ward para conformar el nuevo grupo: el punto (-2 -2) y (-1 -2) a una distancia de 0.0833, el grupo conformado se denomina 7.
3. Calcular las distancias entre todos los grupos y grupo recién conformado utilizando la ecuación (4), donde A y B representan los grupos de la pareja que se une y C los grupos restantes y  $p_A$ ,  $p_B$  y  $p_C$  son los pesos de cada grupo: cálculo de la distancia entre 1 y 7:

$$W((0\ 0) \cup (-2\ -2), (-1\ -2)) = ((0.1667 + 0.1667) * 0.6667 + (0.1667 + 0.1667) * 0.4167 - 0.1667 * 0.0833) / (0.1667 + 0.1667 + 0.1667) = 0.3473 / 0.5001 = 0.6944$$

De forma similar se hacen los cálculos para las distancias entre 7 ((-2 -2) U (-1 -2)) y los demás puntos.

4. Eliminar las filas y columnas correspondientes a los grupos A y B, y adicionar una fila y una columna para registrar las distancias calculadas en el paso 3; se eliminan las filas y las columnas (-2 2) y (-1 -2) y se introducen la fila y columna 7, en donde se registran las distancias calculadas, la matriz de distancias de Ward entre grupo de puntos es:

**TABLA III**  
**DISTANCIAS DE WARD ENTRE EL GRUPO 7 Y LOS DEMÁS PUNTOS Y GRUPOS**

GRUPO	(0 0)	(-1 1)	(1 3)	7	(1 2)
(0 0)	0.0000				
(-1 1)	0.1667	0.0000			
(1 3)	0.8333	0.6667	0.0000		
7	0.6944	1.0278	3.4722	0.0000	
(1 2)	0.4167	0.4167	0.0833	2.4722	0.0000

5. Repetir 2 a 4 hasta llegar a una matriz de 2x2.

Ahora se unen (1 3) y (1 2) a una distancia de 0.0833 y el nuevo grupo se denomina 8. Es necesario calcular las distancias entre 8 y los demás puntos y grupos. Se eliminan de la matriz anterior las filas y columnas correspondientes a (1 3) y (1 2) y se introducen una fila y una columna para el grupo 8. La nueva matriz es:

**TABLA IV**  
**DISTANCIAS DE WARD ENTRE EL GRUPO 8 Y LOS DEMÁS PUNTOS Y GRUPOS**

GRUPO	(0 0)	(-1 1)	7	8
(0 0)	0.0000			
(-1 1)	0.1667	0.0000		
7	0.6944	1.0278	0.0000	
8	0.8056	0.6944	4.4167	0.0000

La menor distancia es 0.1667, entre (0 0) y (-1 1), los cuales se unen en el grupo denominado 9, repitiendo el procedimiento descrito antes, se obtiene la nueva matriz:

**TABLA V**  
**DISTANCIAS DE WARD ENTRE EL GRUPO 9 Y LOS DEMÁS GRUPOS**

GRUPO	9	7	8
9	0.0000		
7	1.2083	0.0000	
8	1.0417	4.4167	0.0000

Luego se unen 8 y 9 a una distancia de 1.0417, conformando el grupo 10 y la nueva matriz de distancias de Ward es:

**TABLA VI**  
**DISTANCIAS DE WARD ENTRE EL GRUPO 10 Y EL 7**

GRUPO	7	10
7	0.0000	
10	3.4028	0.0000

Solo hace falta calcular la distancia entre 7 y 10, la cual es: 3.4028, obteniendo el grupo 11. Esta es la última distancia de unión entre 7 y 10, con lo cual todos los puntos conforman un solo grupo [14].

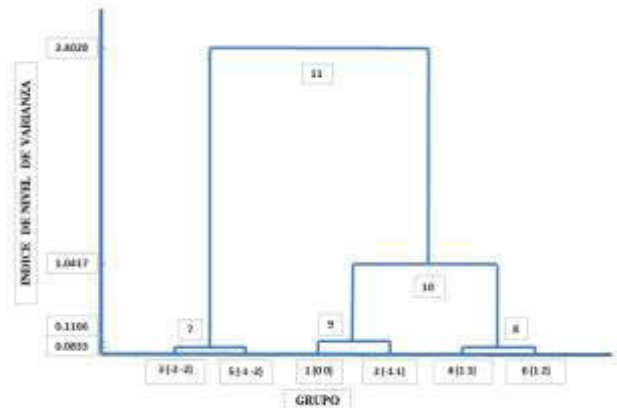
*Procedimiento para obtener el árbol de clasificación utilizando la herramienta de software Matlab*

Las instrucciones que se deben ejecutar en el software Matlab para obtener el dendrograma que nos permita verificar y comparar los resultados obtenidos para el mismo conjunto de datos, son las siguientes:

1.  $x = [0\ 0; -1\ 1; -2\ -2; 1\ 3; -1\ -2; 1\ 2]$
2.  $p = \text{pdist}(x)$
3.  $\text{squareform}(p)$
4.  $l = \text{linkage}(p, 'ward')$
5.  $\text{dendrogram}(l)$

### III. RESULTADOS

Previa la construcción del dendrograma se tiene 6 grupos, cada uno formado por un punto, con una varianza entre grupos de 4.7778. La primera unión es de 3 (-2 -2) con 5 (-1 -2), con un índice de nivel de varianza 0.0833. Esta primera unión corresponde a la distancia de Ward entre los dos puntos, es decir el aumento de la varianza dentro de los grupos. La varianza entre los 5 grupos es 4.6944 (4.7778 - 0.0833). El grupo 8 está formado por la unión entre 4 (1 3) y 6 (1 2), en este paso la varianza dentro de los grupos es 0.1667 (0.0833 + 0.0833) y la varianza entre los cuatro grupos es de 4.6111 (4.6944 - 0.0833). La varianza dentro de los grupos se va incrementando en cada paso, en la distancia a la que se unen los dos grupos y la varianza entre grupos va disminuyendo.



**Fig. 1. Dendrograma resultante empleando el método de Ward**

Al final toda la varianza es dentro de los grupos, pues se tiene un solo grupo con todos los puntos, lo cual quiere decir que la suma de los índices de nivel es igual a la varianza total. A continuación se muestra la Fig. 1, que representa el árbol de clasificación resultante empleando el método de Ward:

Para el análisis de resultados obtenidos nos apoyamos de la herramienta de software matemático Matlab y sus funciones: pdist, linkage y dendrogram, consiguiendo el dendrograma del conjunto de datos. De pdist se logra la matriz de partida para el método de Ward basada en la distancia Euclidiana (Tabla VII), posteriormente de linkage se adquiere un arreglo de pares matricial de los integrantes del nuevo grupo con una tercera columna que detalla el índice de nivel de varianza del grupo que irá en el dendrograma (Tabla VIII). Finalmente con dendrogram se obtiene la representación gráfica del dendrograma [15] (Fig. 2).

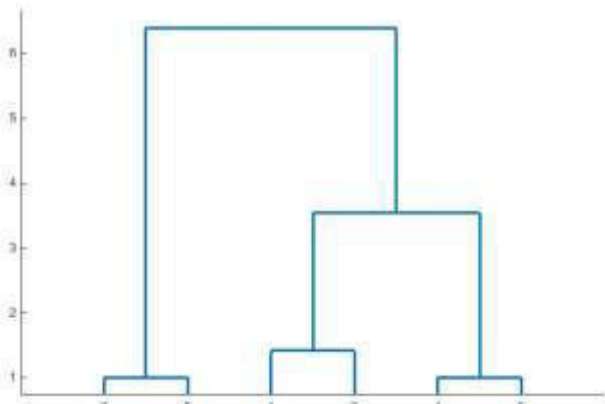


Fig. 2. Representación gráfica del dendrograma utilizando la herramienta dendrogram de Matlab

En el ejemplo, para conseguir una partición del conjunto de puntos, es necesario cortar el dendrograma en un lugar apropiado. En el dendrograma resultante se observan saltos importantes entre los grupos 10 y 11 y entre los grupos 9 y 10. Al cortar entre los grupos 10 y 11 se obtienen dos grupos: uno con el 7 y el otro con el 10 (Fig. 3). Si se corta entre los grupos 9 y 10 se obtienen 3 grupos: 7, 9 y 8 (Fig. 4).

TABLA VII  
MATRIZ DE PARTIDA PARA EL MÉTODO DE WARD BASADA EN LA DISTANCIA EUCLIDIANA UTILIZANDO LA HERRAMIENTA PDIST DE MATLAB

0	1.4142	2.8284	3.1623	2.2361	2.2361
1.4142	0	3.1623	2.8284	3.0000	2.2361
2.8284	3.1623	0	5.8310	1.0000	5.0000
3.1623	2.8284	5.8310	0	5.3852	1.0000
2.2361	3.0000	1.0000	5.3852	0	4.4721
2.2361	2.2361	5.0000	1.0000	4.4721	0

TABLA VIII  
ARREGLO DE PARES MATRICIAL DE LOS INTEGRANTES DEL NUEVO GRUPO CON UNA TERCERA COLUMNA QUE DETALLA EL ÍNDICE DE NIVEL DE VARIANZA DEL GRUPO UTILIZANDO LA HERRAMIENTA LINKAGE DE MATLAB

3.0000	5.0000	1.0000
4.0000	6.0000	1.0000
1.0000	2.0000	1.4142
8.0000	9.0000	3.5355
7.0000	10.0000	6.3901

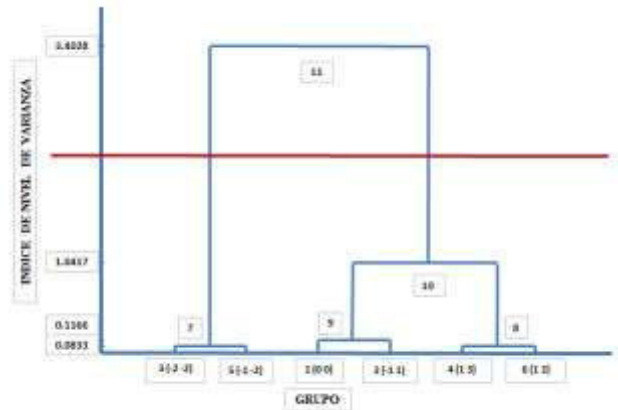


Fig. 3. Corte del dendrograma salto importante entre los nodos 10 y 11, se obtienen 2 grupos: 7 y 10

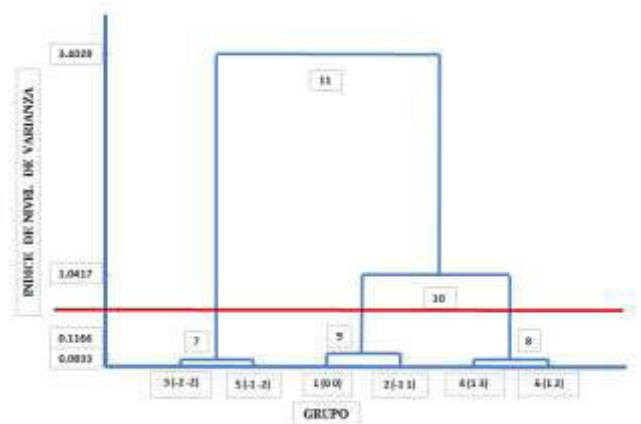


Fig. 4. Corte del dendrograma salto importante entre los nodos 9 y 10, se obtienen 2 grupos: 7, 9 y 8

IV. CONCLUSIONES

- La decisión sobre el número óptimo de clusters es subjetiva. Como ayuda a la decisión sobre el número de grupos se recomienda representar los distintos pasos del procedimiento propuesto a través de un dendrograma. Tomando como referencia que en los primeros pasos el salto en las distancias es pequeño, mientras que en los últimos el salto entre pasos es mayor. Además el punto de corte es aquel en el que comienzan a producirse saltos bruscos.
- Comparando el dendrograma obtenido a través del procedimiento propuesto con el conseguido mediante las herramientas de pdist, linkage y dendrogram de

Matlab, podemos observar que la conformación de los nuevos grupos es similar, pero el índice del nivel de varianza dentro de cada grupo es diferente ya que la matriz de partida para el método de Ward en Matlab utiliza la distancia Euclidiana, por lo tanto la suma de los índices de nivel de varianza es mayor a la varianza total.

- La principal ventaja de los métodos jerárquicos es que se puede representar el problema en forma de árbol o dendrograma donde se observa muy bien la solución final. En el ejemplo se advierte una buena partición en tres grupos. La comparación de las alturas de los índices de nivel de varianza (Fig. 1), constituyen en un buen criterio para decidir cuántos grupos tomar para la partición.

## REFERENCIAS

- [1] Gutiérrez, R, González, A, Torres, F, & Gallardo, JA. (1994). Técnicas de análisis de datos multivariable: Tratamiento computacional: Universidad de Granada.
- [2] Ward Jr, J. H. (1963). Hierarchical grouping to optimize an objective function. *Journal of the American statistical association*, 58(301), 236-244.
- [3] Díaz, B, Cruces, E, & Morillas, A. (1997). Las regiones europeas: una tipología basada en la aplicación de técnicas multivariantes. *Rev. Astur. Econ*, 10, 249-265.
- [4] Chauza López, Leidy Johanna, & Villa Villada, Edward Alfonso. (2012). Análisis de conglomerados comparando el coeficiente de similaridad de gower y el método análisis factorial múltiple para el tratamiento de tablas mixtas: Aplicado al diagnóstico del PDA para la caracterización de los municipios del Valle del Cauca [recurso electrónico].
- [5] A. K. Jain and R. C. Dubes. *Algorithms for Clustering Data*. Prentice Hall Advanced Series. Prentice Hall, 1988.
- [6] R. Xu and D. Wunsch. Survey of clustering algorithms. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 16(3):645-678, 2005.
- [7] Y. Li, S. Zhu, L. Wang, and S. Jajodia. A privacy-enhanced microaggregation method. In *Foundations of Information and Knowledge Systems*, pages 148–159, 2002.
- [8] B. Everitt. *Cluster Analysis*. Social Science Research Council by Heinemann Educational Books, 1974.
- [9] Guillén, Andrés Argüello. (2014). Aproximación de mediciones de tensión perdidas en sistemas de potencia por sensibilidad y disimilitud.
- [10] Pardo, C. E., Ortiz, J. E., & Cruz, D. (2012, July). Análisis de datos textuales con DtmVic. In *XXII Simposio Internacional de Estadística*.
- [11] Cabarcas, Germán, & Pardo, Campo Elias. (2001). Métodos estadísticos multivariados en investigación social. Paper presented at the Simposio de Estadística.
- [12] Pardo, C. E. (1992). Análisis de la aplicación del método de Ward de clasificación jerárquica en el caso de variables cualitativas, Tesis de Maestría, Estadística, Universidad Nacional de Colombia, Facultad de Ciencias, Departamento de Matemáticas y Estadística, Bogotá.
- [13] Campo Elias Pardo. Combination of Factorial Methods and Cluster Analysis in R: The Package FactoClass. *Revista Colombiana de Estadística* Diciembre 2007, volumen 30, no. 2, pp. 231 a 245.
- [14] Villardón, J. (2007). Introducción al análisis de cluster. Departamento de Estadística, Universidad de Salamanca. 22p.
- [15] Guillén, Andrés Argüello. (2014). Aproximación de mediciones de tensión perdidas en sistemas de potencia por sensibilidad y disimilitud.



**Espinel Patricio.** Nació en Latacunga Provincia de Cotopaxi en Ecuador. Es graduado de la Escuela Politécnica del Ejército, Latacunga-Ecuador en Sistemas e Informática en el año 1999 y cuenta con: una Especialidad en Gestión de las Comunicaciones y Tecnologías de la Información de la Escuela Politécnica Nacional Quito-Ecuador, y un Masterado en Ingeniería de Software de la Escuela Politécnica del Ejército, Latacunga-Ecuador.

Actualmente Docente Tiempo Completo del Departamento de Eléctrica y Electrónica de la ESPE Extensión Latacunga. Email: gpespinel@espe.edu.ec.