

Aproximación de la superficie geoidal usando geometría fractal

Nicolás Moncayo ¹, Henry Lala ¹, Miguel Segura ¹

Carrera de Ingeniería Geográfica y del Medio Ambiente
Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE

Sangolquí, Ecuador

nikolasmoncayo@hotmail.com, hen.dan13@hotmail.com,
miguel2877@hotmail.es

Alfonso Tierra ²

Grupo de Investigación Geoespacial
Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE

Sangolquí, Ecuador

artierra@espe.edu.ec

Abstract— In the following paper experimentally get the most appropriate fractal model, parameters and constants to represent approximate the shape of the geoid, using fractal geometry. Was based on Madelbrot and Newton models, which are the models were is possible manipulate the functions, and with this create a model for the desired approaches. Three functions that can represent the behavior of the geoid initially was used. As can observe the results were satisfactory for the first approach.

Keywords—geoid; fractal; Madelbrot; Newton;

Resumen— En el presente documento se obtendrá experimentalmente el modelo fractal, los parámetros y constantes más adecuados para la representación aproximada del geoide, utilizando la geometría fractal. Se basó en los conjuntos de Mandelbrot y Newton, que eran lo conjuntos en los que se podía manipular las funciones, y con esto crear un conjunto propio para realizar las aproximaciones deseadas. Se utilizaron inicialmente tres funciones con las que se pueden representar el comportamiento del geoide. Como se puede observar los resultados fueron satisfactorios para ser la primera aproximación.

Palabras claves—geoide, fractal, Madelbrot, Newton;

I. INTRODUCCIÓN

Fractales (del latín fractus que significa irregular, quebradizo) son resultados de la repetición infinita de los patrones geométricos que se superponen de forma indefinida [1]. Por su irregularidad no pertenecen a la geometría tradicional sino más bien se los califica como elementos semi geométricos que disponen de una estructura esencial tanto regular como irregular [2]. Desde su primera formulación tuvieron una vocación práctica de servir como modelos para explicar la naturaleza donde existe un caos y un orden [3] [4]. Fue el propio Benoît Mandelbrot quien tuvo el mérito de intuir la potencia de los fractales para construir modelos que explicasen la realidad de la naturaleza [4].

Las masas internas de la Tierra, su distribución y su densidad no son homogéneas, por ende la forma real de la tierra no es un elipsoide, por lo tanto es una superficie denominada geoide [5] [6]. El geoide es una superficie

geopotencial del campo de gravedad del planeta, cuya forma es irregular y de difícil modelamiento matemático.

Los fractales constituyen un sistema descriptivo y una nueva metodología para una investigación, porque se puede aplicar geometría fractal para representar desde estructuras muy pequeñas, como bacterias, hasta estructuras gigantes, como galaxias. En las próximas décadas los fractales sin duda revelaran más acerca del caos oculto dentro de la regularidad y acerca de los modelos en que la estabilidad y el orden pueden nacer de la turbulencia y el azar subyacente. Y revelara más acerca de los movimientos de la totalidad [7]. Pueden ser creados por el hombre, incluso con intensiones artísticas, aunque paradójicamente existan estructuras naturales en el medio que a condiciones adecuadas se presentan y maravillan con su belleza cuasi geométrica natural.

La finalidad del trabajo es dar una primera aproximación geométrica a la forma física, real del geoide para compatibilizar y actualizar el modelo y la concepción idealizada que por varias décadas ha tenido, proponiendo y utilizando técnicas nuevas como son los fractales.

II. MARCO TEÓRICO

A. Geoide

El geoide es la superficie geopotencial del campo de gravedad de la Tierra. Es un modelo físico que busca representar su forma verdadera. El geoide es una superficie irregular convexa o casi convexa [5].

B. Fractal

Es el conjunto de formas generadas por un proceso de repetición. Se caracterizan por poseer el mismo detalle a toda escala, por tener longitud infinita, por no ser diferenciables y por exhibir dimensión fraccionaria [1].

C. Estructura fractal

En 1990, Kenneth Falconer, en su obra titulada "Fractal Geometry" [8], explica que una estructura fractal debe satisfacer alguna o algunas de las propiedades siguientes:

1. Posee detalle a todas las escalas de observación.
2. No es posible describirlo con geometría Euclidiana, tanto local como globalmente.
3. Posee alguna clase de autosemejanza, posiblemente estadística.
4. Su dimensión fractal es mayor que su dimensión topológica.
5. El algoritmo que sirve para describirlo es muy simple, y posiblemente de carácter recursivo.

D. Propiedades de los fractales

La primera propiedad establece que un fractal no tiene ninguna escala característica, ya que cualquier escala es buena para representarlo. De esta forma, independientemente de la escala a la que se lo vea, el nivel de detalle del fractal seguirá siendo el mismo.

La segunda propiedad establece que al intentar representar un fractal en términos de geometría clásica, este pierde todo el caos y autosimilitud que le caracteriza, siendo necesaria la creación de una nueva geometría, la geometría fractal.

La tercera propiedad introduce el concepto de autosemejanza. En general, una estructura se dice autosemejante si puede ser construida como una reunión de estructuras, cada una de las cuales es una copia de la original pero a tamaño reducido.

La cuarta propiedad introduce el concepto de dimensión fractal, que para el presente estudio se ocupara la dimensión fraccionaria comúnmente utilizada en el conjunto de Mandelbrot [8].

E. Conjunto de Mandelbrot

Es el más conocido de los conjuntos fractales y el más estudiado [9]. Se conoce así en honor al matemático Benoît Mandelbrot, que investigó sobre él en la década de los setenta del siglo XX. Este conjunto se define así, en el plano complejo. Sea c un número complejo cualquiera. A partir de c , se construye una sucesión por recursión de acuerdo a la ecuación (1).

$$\left\{ \begin{array}{l} z_0 = 0 \text{ (término inicial)} \\ z_n + 1 = z_n^2 + c \text{ (Relación de inducción)} \end{array} \right. \quad (1)$$

Si esta sucesión queda acotada, entonces se dice que c pertenece al conjunto de Mandelbrot, y si no, queda excluido del mismo.

F. Fractal de Newton

El fractal de Newton es una curiosa creación basado en la aplicación del método de Newton para la resolución de sistemas de ecuaciones no lineales. El algoritmo es eficiente para encontrar aproximaciones de los ceros o raíces de una función real. También puede ser usado para encontrar el

máximo o mínimo de una función, encontrando los ceros de su primera derivada [9], según ecuación (2).

$$x_n + 1 = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (2)$$

III. METODOLOGÍA

La metodología del presente proyecto se basa específicamente en determinar los parámetros del modelo fractal para la visualización de la primera aproximación física del geoide y otras figuras, obtenidas experimentalmente.

Al no tener una función que represente el geoide en su forma real, se vio la necesidad de investigar diferentes funciones que puedan servir como base para un posterior modelo.

Se definieron las funciones base para la posterior creación de un programa en el software Matlab, dichas funciones se basaron en los modelos de Mandelbrot y Newton.

Con las funciones base que se experimentaron fueron:

$$\sin z \quad (3)$$

$$\sinh z \quad (4)$$

$$e^{-z^2} \quad (5)$$

Los parámetros de visualización definidos experimentalmente, dentro del código fuente del programa, fueron:

-Coordenadas mínimas y máximas de visualización
 Min: -2-2i
 Max: 2+2i
 -Resolución de la imagen (#píxeles): 2000
 -Número de Iteraciones: 500

Se realizaron modificaciones en estos modelos para cumplir con el objetivo planteado, y se obtuvieron los siguientes modelos fractales:

$$z^n + \frac{f(z)}{f'(z)} + c \quad (6)$$

$$z^n - f(z) + c \quad (7)$$

$$z^n - \frac{f(z)}{f'(z)} + c \quad (8)$$

$$f(z) + c \quad (9)$$

$$z^n + f(z) + f'(z) + f''(z) + c \quad (10)$$

$$z^n + f(z) + \frac{f(z)}{f'(z)} + \frac{f(z)}{f''(z)} + c \quad (11)$$

$$z + \frac{f(z)}{f''(z)} + c \quad (12)$$

$$z^n + f'(z) + c \quad (13)$$

$$z^n + f''(z) + c \quad (14)$$

Donde:

$f(z)$ = función con la que se va a trabajar

n = Sea n un número complejo cualquiera. A partir de n , se estructura la forma polinomial de la ecuación fractal base.

c = Sea c un número complejo que construye una sucesión por recurrencia.

Utilizando las tres bases ecuaciones (3) (4) (5), se experimentó con cada una de las opciones dadas anteriormente usando las ecuaciones (6) hasta (14), y variando las constantes c y n , respectivamente.

IV. RESULTADOS

Analizando las imágenes obtenidas mediante el modelamiento, se puede observar que existen infinidad de formas, en las que se pueden apreciar diferentes estructuras, ya sean bacterias, rayos, galaxias y el geoido como punto principal, entre otros.

En las figuras 1 y 2 se observa el modelamiento de la función seno, donde no se observan ningún parecido a la forma del geoido, pero en la figura 2 se puede ver la forma de una galaxia.

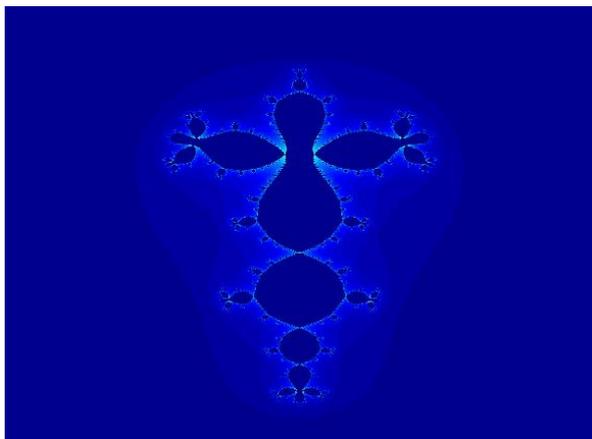


Figura 1. Función seno en la forma $z^n - \frac{f(z)}{f'(z)} + c$, $c=0.7i$ y $n=3$

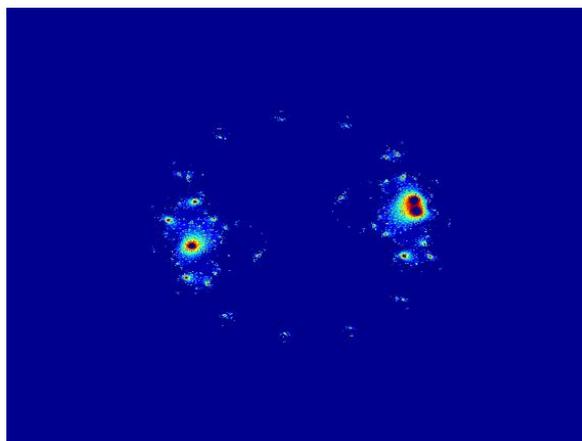


Figura 2. Función seno en la forma $z^n + f'(z) + c$, $c=0.3i$ y $n=15$

En la figura 3 se utilizó la función seno hiperbólico, pero como se observa no se aproxima a la forma del geoido, por lo tanto se cambió de función.

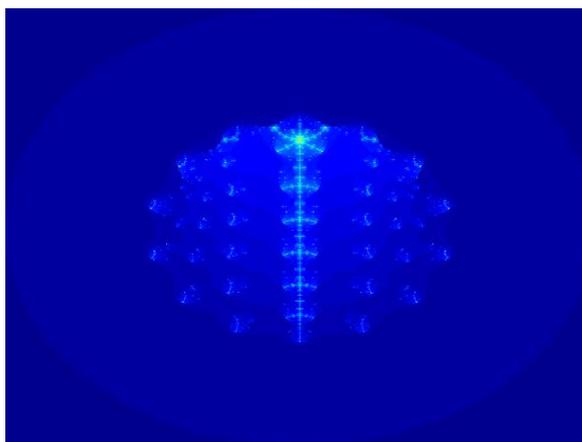


Figura 3. Función seno hiperbólico en la forma $z^n - f(z) + c$, $c=0.3i$ y $n=15$

Y en las figuras 4 y 5 se observa el modelamiento de la función, donde se puede ver una aproximación al dragón de Mandelbrot en la figura 5.

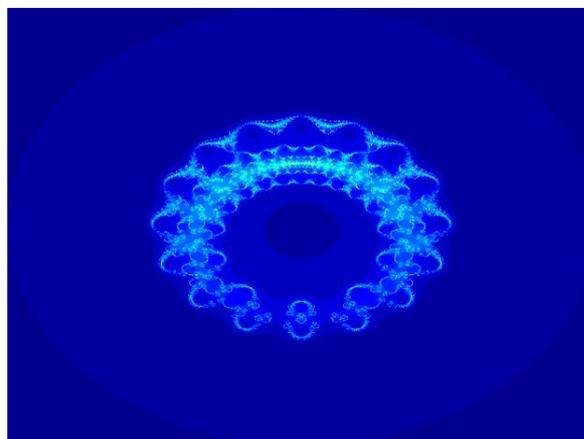


Figura 4. Función e^{-z^2} en la forma $z^n + f'(z) + c$, $c=0.3i$ y $n=15$

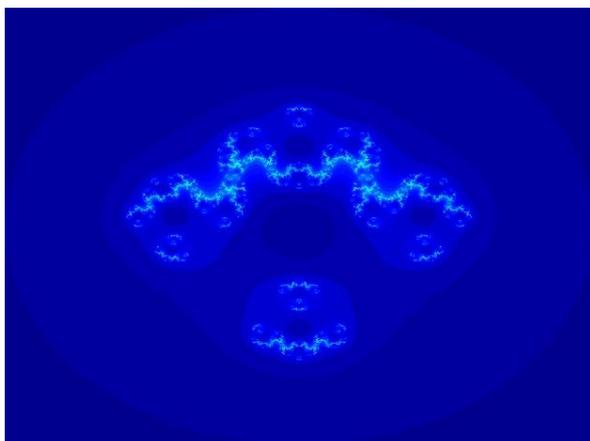


Figura 5. Función e^{-z^2} en la forma $z^n - \frac{f(z)}{f'(z)} + c$, $c=0.3i$ y $n=3$

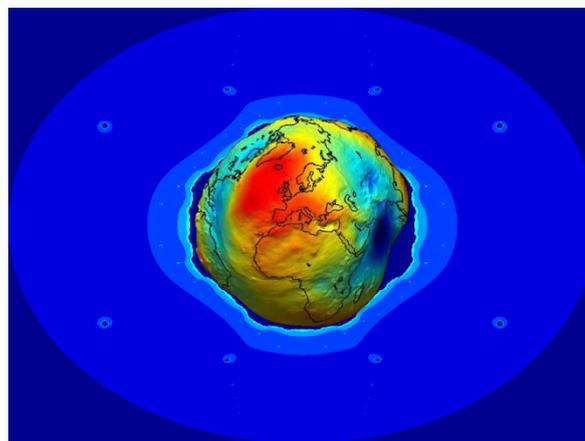


Figura 8. Transposición de la figura 6 con imagen GOCE, 2014

Como se puede observar en las figuras anteriores ninguna se aproxima a la forma del geoide, pero en las figuras 6 y 7 ya se puede ver una aproximación al geoide.

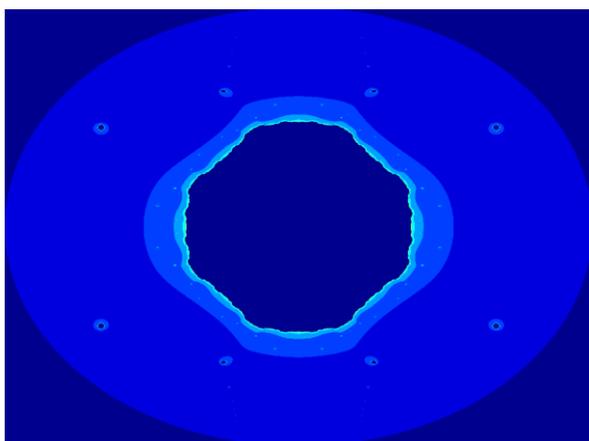


Figura 6. Función e^{-z^2} en la forma $z + f''(z) + c$, $c=0.0001i$ y $n=4$

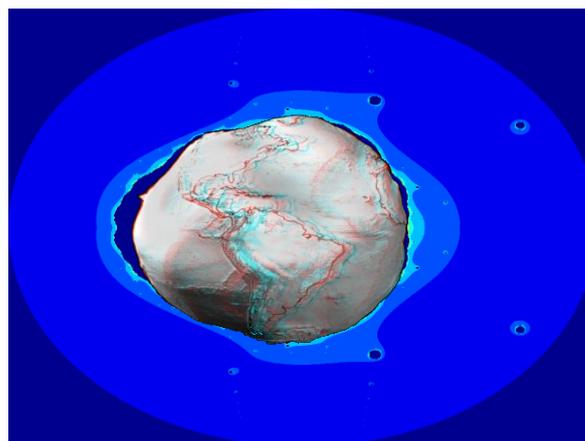


Figura 9. Transposición de la figura 7 con imagen GOCE, 2014

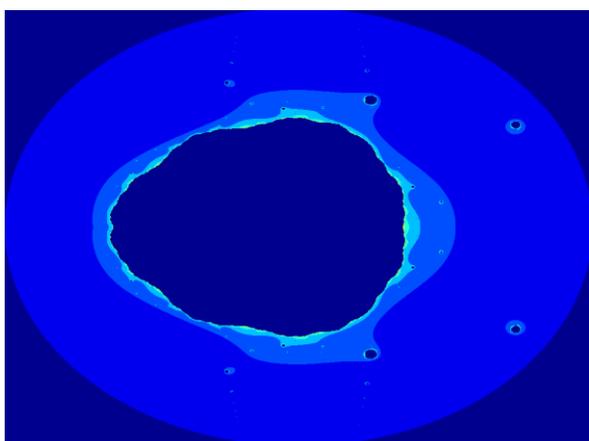


Figura 7. Función e^{-z^2} en la forma $z + f''(z) + c$, $c=0$ y $n=3.07$

En las figuras 8 y 9 se hace una comparación entre el geoide obtenido del satélite GOCE [10] con la obtenida de acuerdo a la figura 6 y figura 7, respectivamente.

V. CONCLUSIONES

- Se puede observar que en los 7 casos presentados, se estructuran 7 gráficas diferentes cumpliendo el principio básico del fractal.
- Si se modificaran los parámetros fijados como constantes y las variables ingresadas las gráficas sufrirían una leve deformación pero mantendrían la forma original en las que se presenta.
- La función que aproxima geoméricamente mejor al geoide es e^{-z^2} .
- En las figuras 8 y 9 se observó una muy buena primera aproximación a la forma real del geoide, pero dependiendo desde el punto de vista del observador.

REFERENCIAS

- [1] Mandelbrot Benoit B. 1975. The Fractal Geometry of Nature, W.H. Freeman And Co., San Francisco, Recuperado El 28/01/2015 [Http://Es.Scribd.Com/Doc/103237194/Mandelbrot-Benoit-La-Geometria-Fractal-De-La-Naturaleza#Scribd](http://Es.Scribd.Com/Doc/103237194/Mandelbrot-Benoit-La-Geometria-Fractal-De-La-Naturaleza#Scribd)
- [2] Definición., ND. Definición de Fractal, Consultado El 10-03-2015 De [Http://Definicion.De/Fractal/](http://Definicion.De/Fractal/)

- [3] UDLAP, ND. Fractales, Universidad de las Americas Puebla (UDLAP), Mexico Recuperado el 28/01/2015 [Http://Catarina.Udlap.Mx/.../Carmona_C_Dc/Capitulo2.Pdf](http://Catarina.Udlap.Mx/.../Carmona_C_Dc/Capitulo2.Pdf)
- [4] UB., 2011. ¿Que Es Un Fractal?, Universidad de Barcelona (UB)-España, Consultado el 10-03-2015 De: [Http://www.ub.edu/.../Fractal.Pdf](http://www.ub.edu/.../Fractal.Pdf)
- [5] Geomaticadm., ND Dispositivos Móviles – Aplicaciones a la Ingeniería y la Gestión del Territorio, Curso On-Line. Miriada X Consultado El 08-03-2015 De [Http://Geomaticadm.Com/.../Sobre-El-Geoide-Vf.Pdf](http://Geomaticadm.Com/.../Sobre-El-Geoide-Vf.Pdf)
- [6] INEGI., ND. Geoide Gravimétrico Mexicano, Instituto Nacional De Estadística y Geografía (INEGI), Consultado el 08-03-2015 De [Http://www.inegi.org.mx/.../Que_Es_Geoide.aspx](http://www.inegi.org.mx/.../Que_Es_Geoide.aspx)
- [7] Briggs, J. Y Peat, F.D. (2000). Espejo y Reflejo. del Caos al Orden. España, Gedisa Consultado el 28/01/2015 De: [Http://www.salud-sin-dolor.com/.../Libro%20el%20espejo%20y%20el%20reflejo%20de%20briggs-Peat.Pdf](http://www.salud-sin-dolor.com/.../Libro%20el%20espejo%20y%20el%20reflejo%20de%20briggs-Peat.Pdf)
- [8] Molero J., 2011. Conjuntos de Julia y Mandelbrot. Cuencas de Atracción. Sistemas de Funciones Iteradas. Aplicación, Etsit-Peru Consultado el 08-03-2015 De [Http://repositorio.bib.upct.es/...1/Pfc4225.Pdf](http://repositorio.bib.upct.es/...1/Pfc4225.Pdf)
- [9] Ross G., Nd., Fractales, Consultado el 10-03-2015 De [Http://webs.um.es/.../Fractal1_Intro%201.html](http://webs.um.es/.../Fractal1_Intro%201.html)
- [10] European Space Agency, 2004, Consultado el 10-03-2015: http://www.esa.int/.../The_Earth_s_gravity_field_geoid_as_it_will_be_seen_by_GOCE