

Dinámica de levas planas

Análisis de incertidumbre de tipo paramétrico para precisión en altas velocidades

José Fernando Olmedo S., Jaime F. Echeverría Y.

DECEM – Universidad de las Fuerzas Armadas, ESPE
Avda Rumiñahui s/n, Sangolqui, Ecuador
jfolmedo@espe.edu.ec
jfecheverria@espe.edu.ec

Marcelo Tulio Piovan

DECEM- ESPE - SENESCYT y UTN-FRBB (Argentina)
11 de Abril 461, Bahía Blanca, BA, Argentina
mpiovan@frbb.utn.edu.ar

Resumen—En este trabajo se expone la investigación realizada sobre la cuantificación de incertidumbre en el comportamiento dinámico de un sistema tipo leva seguidor, contemplando el efecto de la variabilidad de algunos parámetros del modelo matemático representativo del sistema mecánico. Parámetros tales como las constantes de rigidez de los resortes actuadores, la rigidez de los cuerpos intermedios del sistema así como las cotas efectivas de las superficies de alzada de la leva, pueden tener cierta variabilidad debido a aspectos de material, a aspectos de fabricación entre otros. Se emplea un modelo mecánico sencillo con masas suspendidas y vinculadas entre sí por resortes. Se adoptan variables aleatorias asociadas a los parámetros aleatorios y cuyas funciones de distribución de probabilidades se deducen empleando el Principio de Entropía Máxima. El modelo probabilístico se construye a partir del modelo determinístico y luego se emplea el Método de Monte Carlo para efectuar simulaciones para finalmente realizar un estudio estadístico del comportamiento dinámico.

Palabras Clave — levas; dinámica; incertidumbre; modelación probabilística; Método Monte Carlo

I. INTRODUCCION

El mecanismo leva-seguidor es un sistema muy utilizado en la técnica moderna, caracterizado por un potencial inigualable, ya que mediante el tallado de un cilindro o una placa a la que luego se le da un movimiento giratorio o translatorio puede imprimir cualquier función en el seguidor, sin embargo la literatura técnica disponible no aborda todas las implicaciones dinámicas al respecto. Se supone intuitivamente que el seguidor siempre obedecerá las leyes conocidas de movimiento del seguidor como son: la ley armónica, ley parabólica, la ley cicloidal, las polinomiales y otras [1]. Sin embargo esto no siempre se verifica, especialmente cuando las velocidades son altas, el seguidor tienen una longitud importante y la inercia que se pretende elevar es alta. Un mecanismo leva seguidor debería siempre lograr que el movimiento real del seguidor cumpla el requerimiento proyectado, tarea que se complica cuando aparecen las condiciones mencionadas. El presente trabajo pretende identificar las variaciones que se obtendría en la respuesta dinámica del mecanismo leva-seguidor respecto del movimiento proyectado cuando se involucran en el estudio las incertidumbres propias de la manufactura y del diseño como son, la rigidez del resorte, la rigidez del seguidor, la relación de amortiguación y la masa, cuestión que cobra mayor

relevancia en nuestro medio con una industria de precisión incipiente. Se va a considerar para el estudio una leva que cumpla la ley polinomial “345”, con un levantamiento prescrito. Se utiliza como referencia el equipo de análisis de levas Tecquipment TM21 del laboratorio de mecanismos y vibraciones del DECEM y el objetivo radica en identificar las variables con más incidencia en el control del movimiento del seguidor ayudado por las técnicas de incertidumbre para lograr una adecuada sintonización de los mismos. Para lo cual se utilizará un modelo dinámico simple masa, resorte, amortiguador donde se consideren inciertos varios parámetros. Se deducen las distribuciones de probabilidades de los parámetros inciertos en función de la información disponible. Luego se construye el modelo probabilístico y se emplea el método de Monte Carlo para efectuar simulaciones. Finalmente se determinará la respuesta dinámica y se evalúan distintas alternativas vinculadas a los parámetros inciertos.

II. MODELO DETERMINISTICO

A. Hipótesis y breve descripción

El modelo matemático para este estudio se basa en la configuración del equipo de análisis de levas Tecquipment TM21 del laboratorio de mecanismos y vibraciones del DECEM. En la Fig. 1 se muestra el equipo y un modelo mecánico básico.

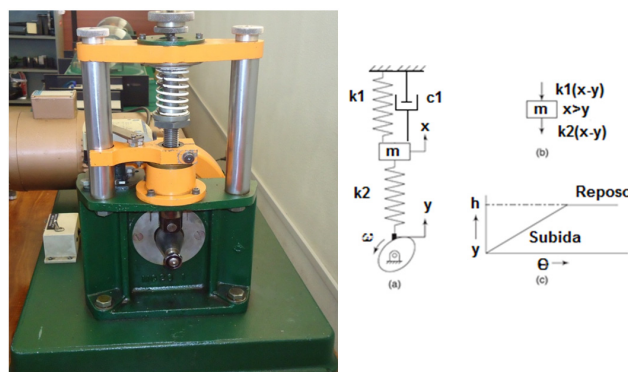


Fig. 1. Esquema del equipo TM21

Para determinar la ecuación diferencial se emplea un modelo de un grado de libertad como el que se ve en el esquema de la Fig. 1. La rigidez del seguidor se identifica con

el resorte de constante k_2 , que en realidad es un cilindro que conecta el rodillo del seguidor con la masa arrastrada m . La masa m en el caso del equipo TM21 corresponde solo al seguidor mencionado. El seguidor se mantiene en contacto con la leva gracias al resorte de constante k_1 y el amortiguador c_1 , correspondiente a la fricción viscosa entre el cilindro y el cojinete respectivo. De esta manera se puede escribir la ecuación del modelo determinístico como:

$$m \ddot{x} + c_1 \dot{x} + (k_1 + k_2)x = k_2 y \quad (1)$$

Donde x es el desplazamiento de la masa e y el desplazamiento de la alzada de la leva. Los puntos indican derivación temporal. La ley de la leva se expresa como:

$$y(\theta) = \begin{cases} h \left[10 \left(\frac{\theta}{\beta_1} \right)^3 - 15 \left(\frac{\theta}{\beta_1} \right)^4 + 6 \left(\frac{\theta}{\beta_1} \right)^5 \right] & \text{if } 0 \leq \theta \leq \beta_1 \\ h & \text{if } \beta_1 \leq \theta \leq \beta_1 + \beta_2 \\ h - h \left[10 \left(\frac{\theta}{\beta_1} \right)^3 - 15 \left(\frac{\theta}{\beta_1} \right)^4 + 6 \left(\frac{\theta}{\beta_1} \right)^5 \right] & \text{if } \beta_1 + \beta_2 \leq \theta \leq \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \\ 0 & \text{if } \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \leq \theta \leq 360^\circ \end{cases} \quad (2)$$

En la Fig. 2. Se puede apreciar una imagen de la forma de la leva del TM21, según se desprende de la Ec. (2). Por otro lado, para poder caracterizar los parámetros del modelo determinístico expresado en la Ec. (1), se empleará programas generales de simulación numérica basados en el método de elementos finitos, de los cuales se puede obtener rigideces efectivas, masas e inercias, etc., de componentes mecánicos del modelo numérico discretizado.

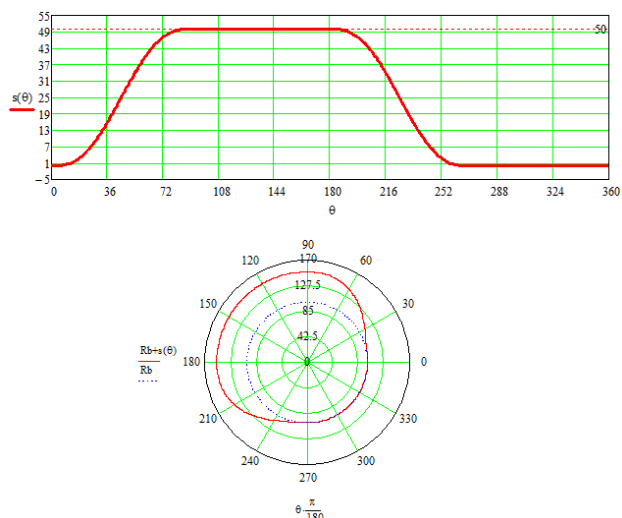


Fig. 2. Alzada y forma de la leva del TM21

Así pues, en la Tabla 1 se indican las propiedades obtenidas y que serán empleadas como aceptando una cierta variabilidad. Se acepta que el material también puede tener variabilidad o incertidumbre pero que será absorbida por los parámetros de la Ec. (1) que serán tomados como variables las aleatorias. El resorte activo del sistema TM21 se puede calcular empleando las típicas expresiones de resistencia de materiales, en función de la geometría (diámetro de espira $D = 36.6$ mm, diámetro de alambre 3.31 mm) y del módulo de

elasticidad transversal (cuyo valor se acepta en 79300 MPa) además de tener 10 espiras.

TABLA I: VALORES DE LOS PARÁMETROS, MODELO DETERMINÍSTICO

Nombre de la propiedad o parámetro	Valor
Constante de resorte real, k_1 en [N/m]	4030
Rigidez del actuador/seguidor, k_2 en [N/m]	$33 \cdot 10^6$
Masa del sistema, m [kg]	1.12
Altura/alzada de la leva, h [m]	0.05
Relación de amortiguamiento ζ	0.06
Coefficiente de amortiguamiento [kg/s] $c_1 = c_{cr} \zeta$	729.58

El coeficiente de amortiguamiento c_1 se calcula [1] conociendo el amortiguamiento crítico, c_{cr} , junto con la relación de amortiguamiento ζ . Además es útil conocer la frecuencia natural del sistema para establecer la zona crítica de funcionamiento del sistema. El coeficiente de amortiguamiento y la frecuencia natural del sistema vienen dados por la siguiente expresión:

$$c_1 = c_{cr} \zeta = \zeta 2\sqrt{km}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = \sqrt{\frac{(33000 + 4.03)1000}{1.12} \frac{60}{2\pi}} = 51840 \text{ RPM} \quad (3)$$

Téngase presente que en la Ec. (3), k representa la rigidez global del sistema, es decir $k = k_1 + k_2$.

B. Solución del modelo determinístico

La Ec. (1), de segundo orden, es relativamente fácil de resolver en forma numérica empleando el software Matlab. Para ello se descompone en un sistema de Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, que se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} (-c_1 v - (k_1 + k_2)x + k_2 y) \quad (4)$$

La solución de la Ec. (4) estará sujeta a condiciones iniciales homogéneas, es decir, velocidad y desplazamiento nulos en el instante inicial. Por otro lado, de ser necesario, la Ec. (4) también se puede expresar en función del ángulo de rotación en vez del tiempo.

III. PLANTEO DEL MODELO PROBABILÍSTICO

En este apartado se construye el modelo probabilístico a partir del modelo determinístico del apartado anterior, aceptando que el mismo ofrece la respuesta media. En este contexto se empleará el Enfoque Probabilístico Paramétrico aceptando a los parámetros indicados en la Tabla I como variables aleatorias. Las funciones de distribución de

probabilidades de las variables aleatorias se deducirán empleando el Principio de Máxima Entropía [2,3,4] en función de la información disponible o aceptable sobre los parámetros inciertos.

Así pues, las constantes de los resortes se consideran aleatorias, la constante de amortiguamiento se considera aleatoria, la masa del sistema y la alzada de la leva también se consideran aleatorias. De manera que para cada uno de los parámetros del modelo se definen variables aleatorias caracterizadas por su valor medio y varianza o coeficiente de variación. Las variables aleatorias V_1, V_2, V_3, V_4 y V_5 representarán a los parámetros k_1, k_2, ζ, m y h . Se considera que las variables aleatorias son independientes y que las mismas están confinadas por valores finitos y reales. En estas circunstancias y empleando el Principio de Máxima Entropía [2,3,4] se puede escribir la función de densidad de probabilidades de cada una de las variables aleatorias como sigue:

$$P_{V_i}(v_i) = I_{[L_{V_i}, U_{V_i}]}(v_i) \frac{1}{U_{V_i} - L_{V_i}}, i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

En la cual $I_{[L_{V_i}, U_{V_i}]}$ es la denominada función de soporte unitario de la variable aleatoria V_i . L_{V_i} y U_{V_i} son los límites inferior y superior de la variable aleatoria, fuera de ellos la distribución es nula. Incorporando las distribuciones aleatorias dadas por la Ec. (5) en la Ec. (4) se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{m} (-c_1 v - (k_1 + k_2)x + k_2 y) \end{aligned} \quad (6)$$

Donde las letras en negritas identifican a los parámetros inciertos. Para la generación de muestras aleatorias de cada uno de los parámetros, se emplea la función de Matlab, “unifrnd(L_{V_i}, U_{V_i})” y se emplea el método de Monte Carlo para efectuar las realizaciones independientes. Luego se emplean los datos relevados para efectuar el correspondiente análisis estadístico. Téngase en cuenta que en la Ec. (6), y es aleatoria a través de la aleatoriedad de h .

Para poder establecer la convergencia de la simulación estocástica $x(\theta)$ se recurre a la siguiente expresión:

$$\text{conv}(N_{MS}) = \sqrt{\frac{1}{N_{MS}} \sum_{j=1}^{N_{MS}} \left(\int_0^{2\pi} \|x_j(\theta) - x(\theta)\|^2 d\theta \right)} \quad (7)$$

La misma corresponde a la media cuadrática de la norma, siendo N_{MS} el número de simulaciones del método de Monte Carlo.

IV. ANÁLISIS DINÁMICO DEL SISTEMA INCIERTO

En este apartado se efectuarán diversos estudios tendientes a dilucidar y/o comprobar la propagación de incertidumbre en la respuesta dinámica del sistema leva-seguidor, a partir de considerar algunos de los parámetros del modelo como

variables aleatorias. Dado que las variables aleatorias se han considerado independientes entre sí, para poder establecer con suficiente propiedad y grado de control la propagación de incertidumbre, la misma se hará para cada variable aleatoria en particular, dejando fijas las restantes. Para todos los casos que se evalúan, se emplea un rango de velocidades de rotación entre 5, 50, 100, 150, 200, 250 y 300 RPM. La incertidumbre es caracterizada por las curvas de todos los mínimos y máximos de las respuestas dinámicas, sean éstas de desplazamientos, velocidades o aceleraciones.

A. Incertidumbre en la altura/alzada del seguidor, h .

La primera prueba corresponderá a la incertidumbre generada por la manufactura de la leva que incide en la altura/alzada proyectada $h \equiv V_5$, ya que esta proviene de un proceso de mecanizado por arranque de viruta. Proceso en el cual se generan rugosidades y ondulaciones. Para obtener valores de h se constató y relevó valores típicos de rugosidad hallados en el maquinado por fresado según los avances especificados en la Tabla 2.

TABLA II: RUGOSIDAD MEDIA RA Y MEDIA EN 10 PUNTOS RM

F (mm/min)	R _A (μm)	R _M (μm)
60	100.56	397.91
70	131.93	489.26
80	123.52	822.23
90	115.06	516.10
100	102.28	397.22

A partir de adoptar un caso testigo de la Tabla II, e.g. F=70 mm/min, se alimenta junto con el valor de la alzada dado en la Tabla I, $h=0.05$ m, lo que permite generar los límites de la variable aleatoria $h \equiv V_5$. Estos límites se encuentran en $\pm 1\%$ del valor medio. A modo de caracterizar la posibilidad de una condición más extrema en el subsiguiente cálculo estadístico se emplean, en V_5 , límites superior e inferior de $\pm 5\%$ del valor medio. Así pues en la Fig. 3 se aprecia la respuesta del desplazamiento para tres condiciones de velocidad de rotación, mostrando los límites máximo y mínimo del cálculo estadístico.

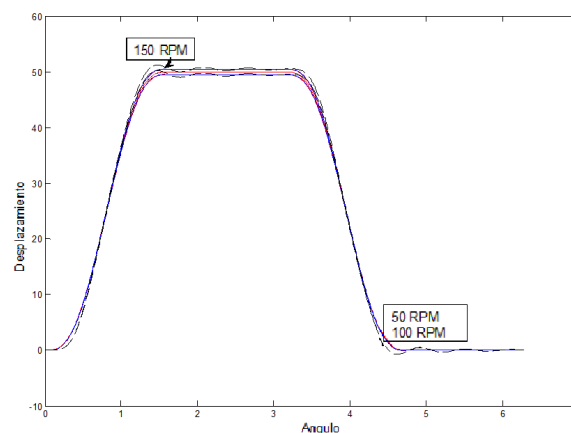


Fig. 3. Desplazamiento del seguidor a 5, 50, 100 y 150 RPM

En la Fig. 4 se hace lo propio que en la figura anterior, pero en este caso para las restantes velocidades de rotación.

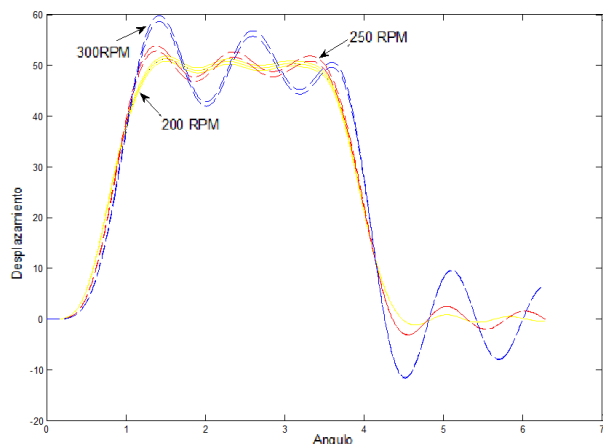


Fig. 4. Desplazamiento del seguidor a 200, 250, 300 RPM

Obsérvese de las Figs. 3 y 4 que el margen entre las respuestas extremas es muy pequeño, sin embargo ello no quita que se pueda dejar patentemente claro la influencia de los efectos de tipo inercial a partir de $\omega=150$ RPM.

En la Fig. 5 se muestran las respuestas aleatorias máximas y mínimas para la velocidad del seguidor a 10, 50, 100 RPM, observándose los mismos patrones de comportamiento que en las otras dos figuras.

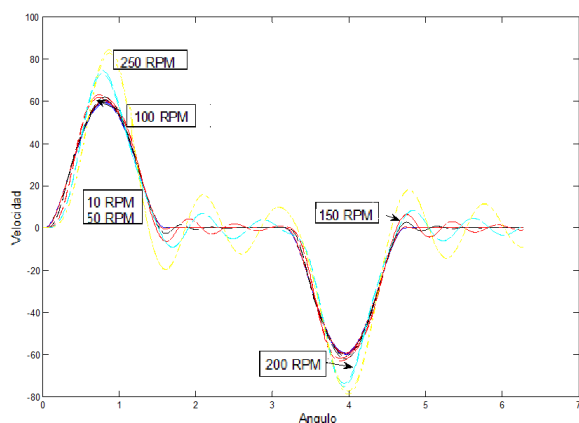


Fig. 5. Velocidad del seguidor a 10, 50, 100 RPM

De este estudio se percibe la leve incidencia de la variabilidad por maquinado de la leva en cuanto a su alzada en la respuesta del seguidor, tanto en los desplazamientos cuanto en la velocidad. Por razones de espacio no se incluye la respuesta de la aceleración, sin embargo tiene el mismo comportamiento cualitativo de los dos anteriores.

B. Incertidumbre en el resorte k_1

En la Fig. 6 se muestra el desplazamiento del seguidor considerando una incertidumbre muy grande en el resorte de fuerza de cierre k_1 . En efecto se han hecho realizaciones considerando solamente la variable aleatoria $V_1 \equiv k_1$ con valor medio dado por la Tabla I y contenida entre límites excesivos del orden de $\pm 50\%$ respecto del valor medio.

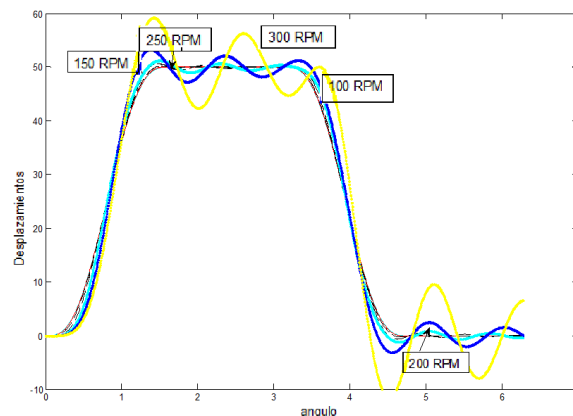


Fig. 6. Desplazamiento variando k_1 en todo el rango de velocidades

En la Fig. 7 se muestra una ampliación de una zona de la Fig. 6, pudiéndose observar la muy ligera banda donde se encuentra el espacio muestral de todas las simulaciones efectuadas con k_1 aleatoria.

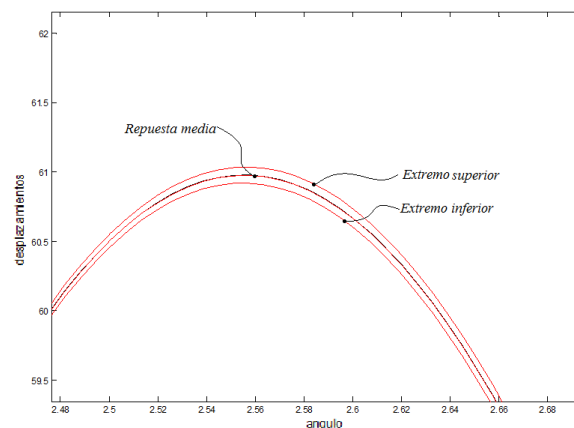


Fig. 7. Desplazamiento variando k_1 (Ampliación)

Las respuestas que se han obtenido de la velocidad y de la aceleración no muestran mayor grado de variabilidad respecto de la incertidumbre en su respuesta. Luego, se puede colegir que el resorte de retención de fuerza no propaga substancialmente la incertidumbre sobre la respuesta dinámica del sistema leva-seguidor. Esto, por otro lado era de esperarse en virtud de la diferencia de magnitud de orden 4 con respecto al parámetro de rigidez k_2 .

C. Incertidumbre en el resorte k_2

La incertidumbre en el parámetro k_2 , se puede deber a múltiples factores: manera de calcular y/o contemplar masa del seguidor, material, etc. Para tener una noción de la propagación de incertidumbre asociada a este parámetro se emplea la variable aleatoria V_2 con valor medio dado por la Tabla I y contenida entre límites de $\pm 20\%$ respecto del valor medio.

Así pues en la Fig. 8 se muestra la respuesta del desplazamiento para diversas velocidades de rotación, mientras que en la Fig. 9 se hace lo propio con la respuesta de

aceleración del seguidor. Nótese que existe una faja importante y muy variable entre la curva de respuestas máximas y de respuestas mínimas con respecto a la respuesta media. Esto es más evidente en el caso de la aceleración, donde se puede notar la influencia de los efectos inerciales a mayores velocidades de rotación.

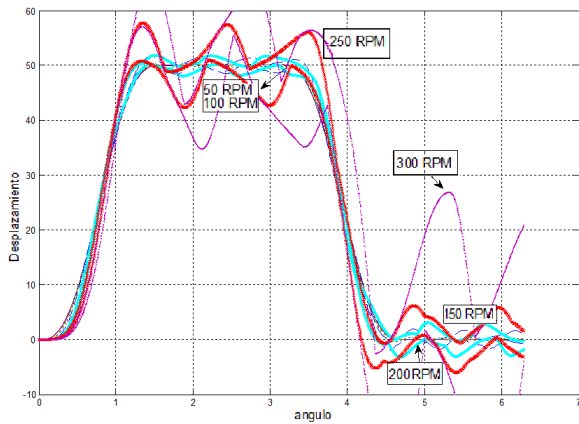


Fig. 8. Desplazamiento con k_2 aleatoria, variando ω de 0 a 300 RPM

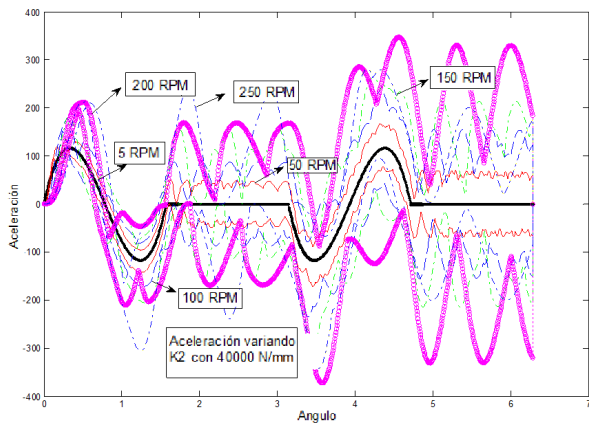


Fig. 9. Aceleración con k_2 aleatoria, variando ω de 0 a 300 RPM

De la Fig. 8 y especialmente de la Fig. 9 se puede observar que la respuesta aleatoria del sistema leva seguidor es muy sensible a la incertidumbre en el parámetro k_2 . Esto a su vez puede generar mucha inestabilidad en la aceleración por efectos dinámicos.

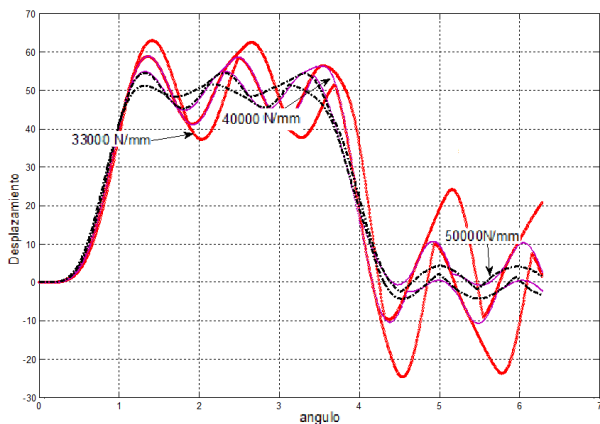


Fig. 10. Desplazamiento con k_2 aleatoria, $\omega=250$ RPM. Varios k_2 medios.

En la Fig. 10 se muestra la incidencia del valor medio del parámetro k_2 . En la medida que el valor medio de k_2 es mayor y aun manteniendo incertidumbre de $\pm 20\%$ respecto del valor medio, la magnitud de la propagación de incertidumbre es menor.

D. Incertidumbre en la relación de amortiguación ζ

La amortiguación es otro parámetro importante de considerar. La relación de amortiguación, se recordará se define como la razón entre la amortiguación efectiva y la amortiguación crítica. Un incremento exagerado de la amortiguación si bien mejora la precisión conllevaría a un corrimiento a la derecha del desplazamiento como se aprecia en la Fig. 11, lo que generaría dificultades en el control de la temporización del mecanismo. Para el cálculo se ha basado en la relación típica consignada en la Tabla I [1], considerando una variación de $\pm 33\%$. En la Fig. 12 se muestra la variación de la velocidad para distintas condiciones.

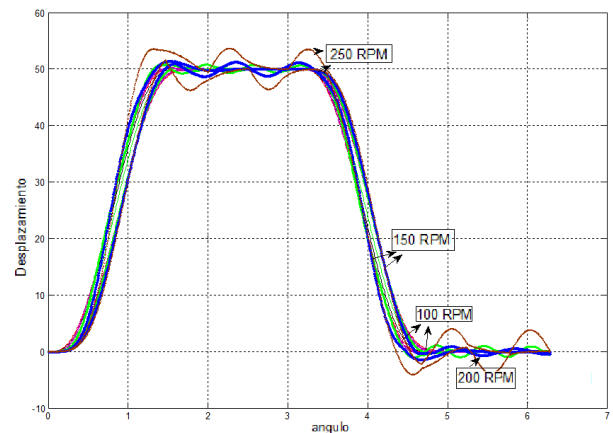


Fig. 11. Desplazamiento con ζ aleatoria, variando ω de 0 a 300 RPM

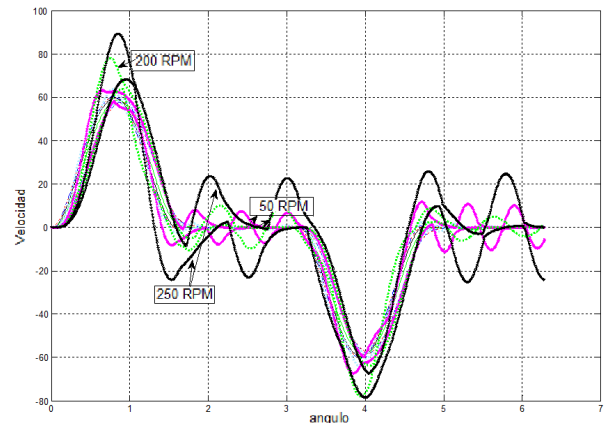


Fig. 12. Velocidad con ζ aleatoria, variando ω de 0 a 300 RPM

La amortiguación es un parámetro difícil de controlar ya que depende muy fuertemente de las holguras y de la viscosidad del aceite usado para lubricar el seguidor. En consecuencia la propagación de incertidumbre de la respuesta dinámica asociada al parámetro de amortiguación es sensible y

se debe estudiar con mayor detenimiento mediante estudios futuros.

E. Incertidumbre en la masa del sistema

En la Fig. 13 se muestra la respuesta de la aceleración del seguidor contemplando una incertidumbre en la masa del sistema, cuya variable aleatoria tiene una media dada por el valor de la Tabla I y límites de variación entre $\pm 28\%$ del valor medio.

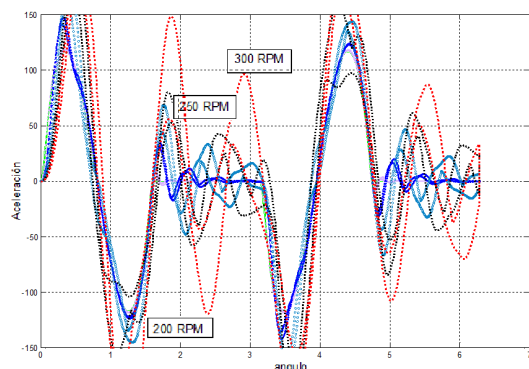


Fig. 13. Aceleración con m aleatoria, variando ω de 0 a 300 RPM

Se puede notar en la figura precedente la influencia importante que tiene la masa del sistema en la propagación de incertidumbre de la aceleración. Otro tanto ocurre con las otras dos curvas, pero no se muestran por razones de espacio.

V. OPCIONES DE REDISEÑO

Los estudios precedentes tienen por objetivo caracterizar cuantitativa y cualitativamente la propagación de incertidumbre de los parámetros que definen la respuesta dinámica del sistema leva-seguidor. Así pues, teniendo en cuenta las simulaciones anteriores se compara entre el sistema original, Fig. 14 a 250 RPM con los valores medios de la Tabla I y un sistema propuesto en el cual se sintonizan los parámetros para conseguir mejores resultados.

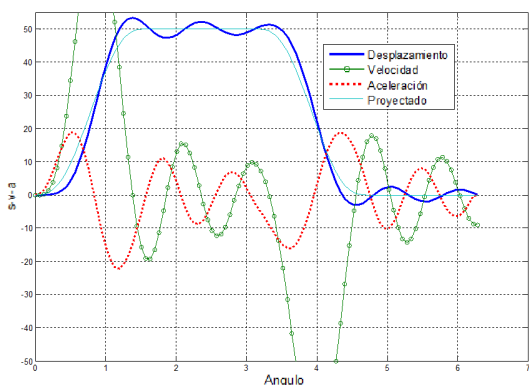


Fig. 14. Respuesta original a $\omega=250$ RPM

En la Fig. 15 se muestra la respuesta global con los siguientes parámetros: $k_1=4030$ N/m, $k_2=80$ MN/m, $m=1.00$ kg, $\zeta=0.1$. Se puede observar que hay menor oscilación y mayor estabilidad en todas las respuestas.

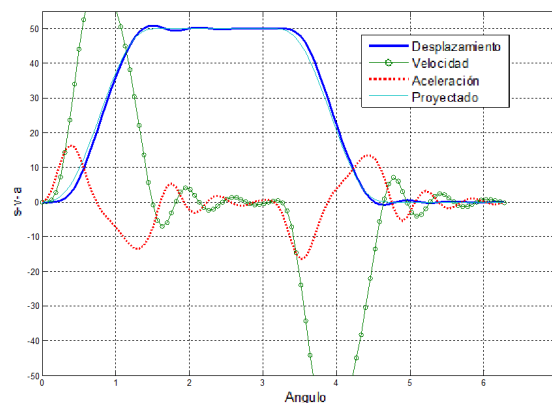


Fig. 14. Respuesta modificada a $\omega=250$ RPM

VI. CONCLUSIONES

A raíz de los varios estudios efectuados para caracterizar la dinámica de levas planas con parámetros inciertos se pueden extraer las siguientes conclusiones:

a) La precisión del mecanizado poco o nada afectará al sistema si antes no se ha sintonizado los parámetros dinámicos.

b) El parámetro de resorte de retención de fuerza no propaga substancialmente la incertidumbre en la respuesta dinámica del sistema y la propagación de incertidumbre debida al parámetro de rigidez del seguidor es importante en la dinámica del sistema.

c) La propagación de incertidumbre debida al parámetro de amortiguamiento es importante en la dinámica del sistema. Aunque debe estudiarse con mayor detenimiento y enfoques más detallados debido a su complejidad.

d) La propagación de incertidumbre debida al parámetro de masa es importante en la dinámica del sistema, especialmente en la respuesta de la aceleración y la velocidad.

e) Se ha podido hacer un rediseño del sistema, mejorando las prestaciones del mismo.

AGRADECIMIENTOS Y RECONOCIMIENTOS

Los autores desean reconocer el apoyo y auspicio de la Universidad de las Fuerzas Armadas, ESPE y de la SENESCYT del Ecuador. Además el último autor desea agradecer el apoyo de la Universidad Tecnológica Nacional FRBB y el CONICET.

REFERENCIAS

- [1] R.L. Norton, "Diseño de maquinaria", McGraw Hill, U.S.A., 2000.
- [2] E. Jaynes, Probability Theory: The logic of Science, Vol.1. Cambridge University Press, Cambridge, U.K. 2003.
- [3] C.E. Shannon, "A mathematical theory of communication", Bell System Tech, vol. 28: 379-423 and 623-659, 1948.
- [4] T.G. Ritto, R. Sampaio, "Stochastic drill-string dynamics with uncertainty on the imposed speed and on the bit-rock parameters". International Journal of Uncertainty Quantification, vol.2(2), pp.111-124, 2011