Revista Ecuatoriana de
Investigación Educativa
https://journal.espe.edu.ec/ojs/index.php/investigacion-educativa/

ISSN: XXXXXXXXXXXXX
REIE Vol. 1, Num 1 - abril 2022
DOI: XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

La geometría y el arte cubista como estrategia de enseñanza del objeto fracción: Un nuevo enfoque

Geometry and cubist art as a teaching strategy of the fraction object: A new approach

Antonio Di Teodoro[1], María Fernanda Romero Trallero[2]

Recibido: 08-12-2019 Aceptado: 27-04-2020

Resumen

El presente artículo muestra una propuesta pedagógica para la enseñanza del objeto fracción y la iniciación a parte de su álgebra (adición y sustracción) para niños de quinto grado, basada en las teorías desarrolladas por Piaget, Vigotsky, Bruner y Ausubel. Esta propuesta retoma métodos de enseñanza, conceptos matemáticos conocidos y utilizados desde hace varias décadas en educación matemática desde una perspectiva completamente distinta y novedosa que busca contribuir con la mejora de la calidad educativa en el área. Fue aplicada a niños de doce años de edad, pero puede ser aplicada a niños de otras edades. Las actividades pedagógicas en aula parten de la elaboración de un vitral inspirado en los inicios del arte cubista para explicar de forma concreta los contenidos.

Palabras claves: Enseñanza de fracciones, dificultades de aprendizaje, dificultades didácticas, arte y matemática, comparación.

Abstract

The present article shows a pedagogic offer for teaching the fraction object and initiation to a part of his algebra (addition and subtraction) for children of fifth degree, based on the theories developed by Piaget, Vigotsky, Bruner and Ausubel. This offer retakes methods of education, known mathematical concepts that has been used for several decades in mathematical education, with a completely different and new perspective that seeks to contribute to the improvement of educational quality in the area. It was applied to twelve-year-old children but it can be applied to children of other ages. The pedagogic activities in classroom starts with the development of a vitral inspired by the beginnings of the cubist art to explain concretely the contents.

Keywords: Teaching fractions, learning difficulties, didactic difficulties, art and mathematics, comparison.

[1] Universidad San Francisco de Quito, Colegio Politécnico, Departamento de matemáticas, Quito, Ecuador. nditeodoro@usfq.edu.ec
[2] Grupo de investigación en Educación del Colegio Integral El Ávila, Colegio Integral El Ávila, Caracas, Venezuela. mfromero@elavila.org

I. Introducción

Los docentes, a lo largo de su carrera, acumulan gran cantidad de vivencias, aprendizajes y retos. Los alumnos siempre son distintos, pero hay un factor que persiste en el tiempo, la aprehensión hacia las matemáticas y el rechazo a las fracciones de muchos estudiantes.

Muchos han sido los artículos, textos y trabajos de investigación que se han escrito respecto a las matemáticas y fracciones, algunos de ellos son: *Acerca de dificultades para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones* publicado por la revista Ema en el 2001; *Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción, Dificultades experimentadas por el maestro de primaria en la enseñanza de fracciones*, publicadas por Relime en el 2008 y 2010 respectivamente; *Las fracciones son un problema* publicado en Quehacer educativa en el 2009; *Dificultades en el aprendizaje de las fracciones y el conocimiento del profesor* publicado por la Universidad de Chile en el 2011, el trabajo final de grado *Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados con los docentes de primaria de la institución educativa San Andrés de Girardota* realizado por Claudia Hincapié en ese mismo año; *Las fracciones: ¿Problema de aprendizaje o problemas de la enseñanza?* Publicado por la revista Pilquen en el 2012; *La actitud hacia las matemáticas y el logro de los aprendizajes de los estudiantes de las instituciones educativas primarias del distrito de Copani - Yunguyo 2017,* tesis realizada por Marivel Ysmena Sagua para recibir su título de magister en Perú, entre muchos otros.

Tomando en cuenta esta situación, se diseñó una estrategia pedagógica para la enseñanza del objeto fracción. Esta constituye una propuesta que busca acercar al estudiante a la matemática de una forma sencilla que contribuya a superar la aprehensión hacia el área. La estrategia parte de la desvinculación del alumno con la clase de matemática tradicional, basada en la exposición y uso del pizarrón, a una basada en la vivencia y experiencia. En ella se presenta una situación motivadora al estudiante que lo conecte con el contenido a aprender, lo que le permite no centrarse en el proceso sino en el aprendizaje per se. La situación motivadora en este caso, es un proyecto de arte: la elaboración de un vitral inspirado en el movimiento artístico del cubismo.

La estrategia pedagógica se inspiró en los trabajos de Pablo Picasso, Piet Mondrian, las formas geométricas básicas (el triángulo, el cuadrado y el rectángulo) y se fundamenta, desde el punto de vista pedagógico, en los aportes realizados por Piaget, Vigotsky, Ausubel y Dewey a la teoría constructivista.

De acuerdo a esta teoría, el aprendizaje es un proceso activo donde cada estudiante construye el conocimiento basándose en el saber previo, sus experiencias y las conexiones que hace entre estas. Como consecuencia, el alumno va modificando sus estructuras mentales a través de un proceso de adaptación. Es por esto que, en este enfoque, el papel más importante lo tiene el alumno y no el docente, este se convierte en un facilitador del proceso. El alumno es el líder de su desarrollo educativo al ser el creador de su propio aprendizaje, según esta teoría el alumno llega a valorar más el proceso de aprender que el aprendizaje en sí mismo. La labor de un docente, de acuerdo a estos autores, tiene como objetivo presentar a los alumnos la información en un formato adecuado, con el fin de promover los conflictos cognitivos que impulsen al niño a buscar respuestas que eventualmente lo lleven a construir el nuevo aprendizaje.

En el caso de estudio presentado, se trabajó con alumnos cursantes de quinto grado en un colegio regular (no está catalogado como una institución que brinda educación especial) ubicado en Caracas, Venezuela que tenían una edad promedio de 12 años. Según los estudios realizados por Piaget sobre los estadios del desarrollo, a esta edad los niños se encuentran empezando la etapa de las operaciones formales, apenas han cerrado el estadio de las operaciones concretas, por lo que están empezando a desarrollar una visión más abstracta del mundo y a utilizar la lógica formal.

II. Marco teórico

Sin importar el material empleado, los docentes se enfrentan a un verdadero reto al preparar las clases para enseñar fracciones. Los métodos utilizados hasta el momento no permiten hacer de forma concreta la construcción del conocimiento en cada paso. Los textos utilizan con frecuencia chocolates, tortas, caramelos y dibujos para explicar el concepto de fracción, la comparación, la adición y sustracción de fracciones con igual denominador; pero el verdadero problema se presenta al explicar las fracciones impropias, mixtas (también llamados números mixtos), comparación de fracciones, adiciones y sustracciones de fracciones con distinto denominador. Esta situación se mantiene indistintamente del año de publicación o el tipo de libro usado, ya sea más basado en textos y teorías o con mayor apoyo gráfico. La información disponible a través de medios digitales, en su mayoría, no es muy distinta, suele ser muy teórica, los ejemplos y ejercicios propuestos para realizar tratan superficialmente el concepto de fracción y abundantemente cómo representar una fracción propia; no profundizan y tienen poco alcance. Para aprender y entender las fracciones a profundidad, la abstracción se hace muy necesaria y aquellos niños que, por sus características individuales, requieren trabajar de forma concreta, se sienten frustrados, lo que hace tortuoso y difícil el aprendizaje de este tema.

Según De Guzmán & Navarro (s.f.), en la educación matemática lo más importante debe ser la manipulación de objetos matemáticos luego de su comprensión, la activación de la capacidad mental, el ejercicio de la creatividad, la reflexión sobre el proceso de pensamiento, el entretenimiento a través de la propia actividad mental, la preparación para los problemas de la ciencia, la vida y los retos de la tecnología.

Al iniciarse el aprendizaje del objeto fracción en la educación primaria, los niños se encuentran (de acuerdo a Piaget) en el estadio de las operaciones concretas, por lo que tienen una dificultad real para entender y procesar ese objeto abstracto y desconocido llamado fracción. Un dibujo o un chocolate por sí solos no brindan el acompañamiento concreto que el niño necesita.

De Guzmán y Navarro (1993) en su trabajo sostienen que:

> Como reacción a un abandono injustificado de la geometría intuitiva en nuestros programas, del que fue culpable la corriente hacia la «matemática moderna», hoy se considera una necesidad ineludible, desde un punto de vista didáctico, científico, histórico, volver a recuperar el contenido espacial e intuitivo en toda la matemática, no ya sólo en lo que se refiere a la geometría.

De León (1998) afirma:

> Los números fraccionarios son una estructura de una riqueza y complejidad que encuentra aplicaciones en una multiplicidad de contextos: la ciencia, la técnica, el arte y la vida cotidiana. En cada uno de estos contextos las fracciones se presentan con una diversidad de significados. (p. 9)

Las fracciones no se limitan al lenguaje matemático, forman parte de la vida cotidiana; por ello, es preciso que se retome no sólo esa visión natural de las fracciones, sino también lo que es importante en educación matemática. No es de la teoría a la práctica como los niños van a adquirir el aprendizaje; por el contrario, es de la práctica a la teoría como se logra el aprendizaje significativo.

La dificultad que experimentan los estudiantes va mucho más allá de la vinculación del objeto fracción a su vida, Llinares y Sánchez afirman que:

> La razón de que estos algoritmos se pueden convertir en reglas sin sentido puede ser debida a una introducción demasiado temprana en la escuela (traslación demasiado rápida hacia el manejo de símbolos sin la existencia de un esquema conceptual), pero también en algunos casos por una introducción desvinculada de un fundamento suficientemente concreto y natural a la operación (falta de la existencia de un «modelo de compresión»). (p.133).

La problemática de la enseñanza y aprendizaje de las fracciones y la matemática en general, está ligada a un problema mayor, la calidad educativa. Este ha sido un tema de gran preocupación en la última década, sobre todo en Latinoamérica. Numerosos entes gubernamentales y no gubernamentales han volcado sus esfuerzos a registrar la realidad educativa y hacer llamados de alerta ante los alarmantes hallazgos entre los que podemos mencionar:

Más de 617 millones de niños y adolescentes no están alcanzando los niveles mínimos de competencia (NMCs) en lectura y matemáticas de acuerdo con las nuevas estimaciones del Instituto de Estadística de la UNESCO (UIS). (UNESCO, 2017, p. 1). Esto lleva a plantear el estado actual de cómo se está proyectando las matemáticas en los colegios del Ecuador.

En los últimos años, el Ministerio de Educación del Ecuador ha buscado sumar esfuerzos para mejorar el proceso educativo creando reformas curriculares para desarrollar las capacidades de realizar conjeturas, aplicar información, descubrir, comunicar ideas, de forma que los estudiantes desarrollen la capacidad de argumentar y explicar los procesos utilizados en la resolución de un problema, demostrando su pensamiento lógico matemático y de interpretar fenómenos y situaciones cotidianas para favorecer el proceso de aprender a aprender. Sin embargo, la realidad de las aulas refleja que los docentes trabajan en forma aislada cada tema y el proceso de aprender a aprender es una mera teoría.

Los estudiantes resultan afectados, ya que los docentes se enfocan en los temas propuestos por los libros de texto y no en el conocimiento que es relevante, así dejan de lado conceptos que son indispensables para que el estudiantado pueda seguir creciendo en su saber y hacer matemático.

El proceso de aprendizaje, debe permitir el desarrollo del pensamiento crítico y el razonamiento en el estudiante. La adquisición de un nuevo conocimiento no debe basarse ni partir de la aplicación de fórmulas que generalicen conceptos o estrategias de resolución que automaticen los pasos para obtener un determinado resultado. El aprendizaje debe brindar mayores herramientas a los estudiantes para hacer frente a los retos que se les pueden presentar, estimular la creatividad, conectarse con la aplicación del mismo en situaciones de la vida diaria.

Es por lo anterior que se planteó como objetivo el elaborar una propuesta pedagógica para que alumnos entre los 9 y los 1 3 años, cursantes de cuarto, quinto y sexto grado de educación básica puedan crear su definición del objeto fracción y realizar operaciones algebraicas, de manera didáctica, a través de la aplicación de actividades plásticas inspiradas en el cubismo. Esta propuesta busca la integralidad del conocimiento y la inclusión de la geometría como hilo conductor entre las artes plásticas y la matemática a través de la creación de un problema matemático en el cual se incluyen elementos de las artes plásticas: mosaicos, vitrales, cubismo. En ella se muestra la aplicación de una actividad didáctica en que los alumnos experimentan a través de materiales de las artes plásticas (pinturas, vidrios, papel celofán, entre otros).

III. Basamento pedagógico

El nivel de abstracción de los niños en apariencia no representa un problema mayor al momento de aprender las fracciones; sin embargo, lo es. Según la teoría de Piaget (citado en Papalia y Olds, 1998 y Craig, 1997 el ser humano durante su crecimiento experimenta un desarrollo no sólo físico sino también cognitivo. Piaget afirma que los niños pasan por cuatro estadios del desarrollo que se dan en un orden fijo universalmente, con algunas variantes de edad entre un niño y otro. Estos estadios son: Sensorio-motor desde el nacimiento hasta los 2 años, Preoperacional desde los 2 a los 7 años, Operaciones concretas desde los 7 a los 12 años y Operaciones formales desde los 12 años en adelante.

Durante el estadio de las operaciones concretas disminuye el egocentrismo y se desarrolla la noción de conservación de números, volúmenes y materiales. Gracias esta noción, los niños pueden centrarse en más de un aspecto de un estímulo. Los procesos de razonamiento pasan a ser lógicos y pueden aplicarse a problemas concretos o reales. Se desarrollan los conceptos de seriación, jerarquía y la clasificación de los conceptos de causalidad, espacio, tiempo y velocidad a nivel concreto, es decir, basándose en lo que pueden manipular, ver o pensar porque ya lo han visto, ya que su pensamiento abstracto no está desarrollado.

En el estadio de las operaciones formales los niños logran la abstracción, por lo que utilizan el razonamiento lógico inductivo y deductivo. Son capaces de formular hipótesis y probarlas hasta encontrar la solución de un problema, desarrollan una mayor comprensión del mundo, la idea de causa y efecto, son capaces de encontrar incongruencias en sus creencias, o acciones, aplican la reversibilidad y la conservación en todo tipo de situaciones, ya sean reales o imaginarias.

De acuerdo a la teoría constructivista, los individuos aprenden partiendo de su experiencia previa y el conocimiento que poseen. Basándose en éstos, construyen los nuevos aprendizajes integrando la información conocida con la nueva a través de la asimilación y la acomodación. El aprendizaje se da a través de la experimentación, por ello, es un proceso activo y muestra la interpretación personal del entorno. El constructivismo hace énfasis en la resolución de problemas como medio de aprendizaje. Sugiere que es posible crear nuevos conocimientos a través de la presencia de un moderador (docente).

El educador constructivista brinda oportunidades de aprendizaje, propone actividades atractivas, retadoras y reconoce la importancia del error dentro del proceso de aprendizaje, teniendo siempre en cuenta su papel de mediador dentro del proceso.

El constructivismo plantea que los nuevos conocimientos se relacionan a los conocimientos anteriormente obtenidos. Para que el aprendizaje se logre de manera más provechosa, se requiere de una disposición y motivación por parte del alumno que facilite la adquisición del nuevo conocimiento, esta igualmente le permite que la retención sea más duradera ya que es almacenada en la memoria a largo plazo. El conocimiento es significativo porque puede ser relacionado con su estructura de conocimiento y es consecuencia de un proceso de aprendizaje también significativo. Por ello la meta de la educación debe ser acceder a un aprendizaje significativo para que el estudiante pueda generar su propio conocimiento.

IV. Formalismo matemático

La estrategia pedagógica diseñada está basada en la geometría euclidiana. En ella se construyen los diferentes conceptos usando la congruencia de triángulos y la partición de un cuadrado pitagórico en diferentes números de partes, algunas de estas particiones son exactas mientras otras son inexactas. Esta partición genera una dificultad, la dificultad geométrica.

La geometría ha pasado a un segundo plano en las escuelas Latinoamericanas, la mayoría de los niños poseen pocos conocimientos del área, por lo que se requiere de un trabajo geométrico previo a la puesta en práctica de esta estrategia. Esta deficiencia, sin embargo, es el principal motivo por el cual se buscó que, a través del arte y su estructura, se pudiera abordar el lenguaje de la geometría y por ende las fracciones.

4.1 Sobre la definición de la fracción

Una fracción es cada una de las partes iguales en las que se divide un todo. Este concepto no es suficiente para hacer el abordaje concreto a través de la geometría, por ello es importante definir también el área. En este abordaje el todo estará representado por un área de trabajo que será pintada de una manera específica.

El área es la medida de la superficie de una figura.

Un cuadrado pitagórico es un cuadrado construido a partir de otros cuadrados con área 1x1. Todo cuadrado es pitagórico permite redimensionar la unidad.

Un ejemplo de un cuadrado pitagórico 3x3, formado a partir de 9 cuadrados de área de 1x1:

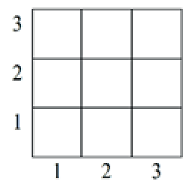


Figura 1: Cuadrado Pitagórico

4.2 Multiplicación pitagórica

La multiplicación pitagórica se refiere al proceso de sumar cuadrados de área 1x1. Por ejemplo, 3 x 2 equivale a sumar 6 cuadrados 1x1. En este proceso, es importante resaltar que la propiedad conmutativa se desprende de forma natural como se evidencia en la Figura 2.

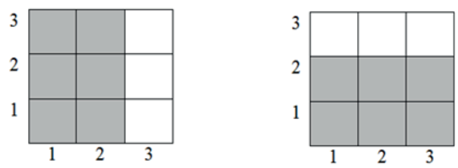


Figura 2: Cuadrado Pitagórico

Al hablar de fracciones deben tomarse en cuenta dos conceptos que son muy importantes: unidad y equidad. Equidad se refiere a justicia en un reparto, una proporción (correspondencia debida de las partes de una cosa con el todo) igual, mientras que la unidad se refiere a cada uno de los elementos distintivos en un conjunto, es la cantidad que se toma por medida o término de comparación de las demás de su especie.

Si se tiene un cuadrado y se parte exactamente por la mitad usando una línea diagonal, se obtienen dos triángulos congruentes, de acuerdo a los planteamientos de Arquímedes recopilados por Health (1956), identificados con los números I y II (ver figura 3). La suma de las áreas de estos dos triángulos equivalente al área del cuadrado completo. Esto ocurre gracias a que el triángulo I es congruente con el triángulo II por el criterio de congruencia lado, lado, lado definido por Euclides en Health (1956).

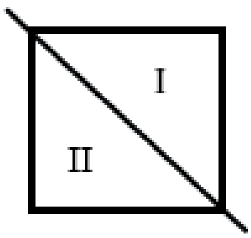


Figura 3: Congruencia de triángulos por el criterio de congruencia lado, lado, lado

Es decir, que estos triángulos equivalen a media parte del cuadrado. Esto se puede expresar como uno proporción dos o (1:2) de un cuadrado 1x1. Si se divide ese mismo cuadrado 1x1 en 4 partes, usando otra diagonal, (se obtienen 4 triángulos) cada triángulo equivaldría a uno proporción cuatro (1:4) de ese cuadrado (ver Figura 4).

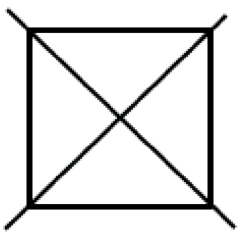


Figura 4: Cuadrado 1x1 dividido en 4 por dos diagonales. Cada triángulo equivale a 1:4

Si se considera ahora un cuadrado pitagórico 3x3 y se parte exactamente por la mitad, y se cuentan los cuadros resultantes, se obtiene lo siguiente:

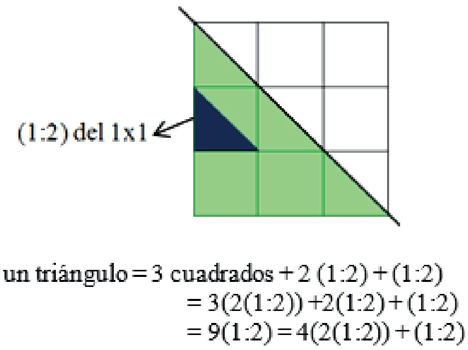


Figura 5: Cuadrado Pitagórico 3x3 partido por la mitad

Se observa que la mitad del cuadrado pitagórico (lo que geométricamente genera un triángulo) se compone por 3 cuadrados 1x1, más un cuadrado 1x1 que resulta de la suma de dos triángulos pequeños (1:2) + (1:2) y finalmente (1:2) de otro cuadrado 1x1, lo que daría un total de 4 y medio cuadrados. En otras palabras, si el área del cuadrado entero (número de cuadros dentro del polígono) es 9, entonces el cuadrado pitagórico está compuesto por 9 cuadrados. Si este cuadro es partido con una diagonal (ver figura 5), se generan dos triángulos que están compuestos por 4(2(1:2)) + (1:2) cuadrados de 1x1. Si se siguen realizando particiones del cuadro pitagórico, por ejemplo, en 4 partes se obtiene que:

Área de un triángulo (figura 6) = 4 (1:4) + 4 (1:4) + (1:4) = 9 (1:4)

Lo que en notación decimal representa 2,25 (ver Figura 6).

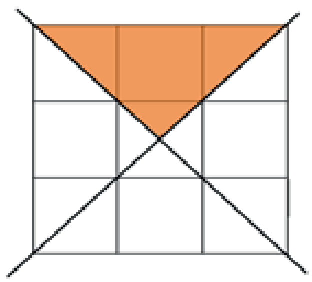


Figura 6: Cuadrado Pitagórico 3x3 partido en 4

Es importante resaltar que, al realizar estas particiones, el área de un triángulo se define de manera natural.

Este proceso de partición permite establecer una nueva definición del objeto fracción basada en las relaciones anteriormente vistas. En general un objeto fracción es una proporción (n:m) donde n y m viven en Z (conjunto de los números enteros). Si n=k1.k2, con k1 y k2 en Z, entonces (n:m) es equivalente a (k1.k2:m). (“.” Operación de multiplicación).

Ahora, en otro sentido, si se tiene un cuadrado y este se parte exactamente por la mitad usando una línea vertical se obtienen dos rectángulos, tal que la suma de los medios rectángulos constituye el cuadrado completo. Es decir, partir exactamente por la mitad un cuadrado usando una línea diagonal equivale a partir exactamente por la mitad un cuadrado usando una línea vertical (ver Figura 7):

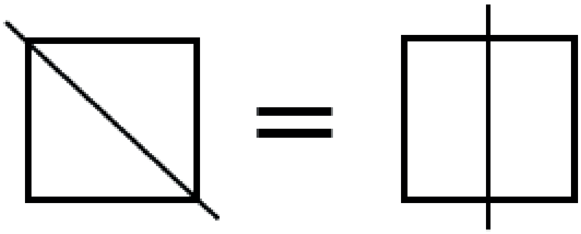


Figura 7: Congruencia de cuadrados o rectángulos generados por partición de un cuadrado 1x1)

Por eso, si se continúa partiendo el cuadrado pitagórico usando líneas verticales y horizontales, se obtiene lo siguiente (ver Figura 8):

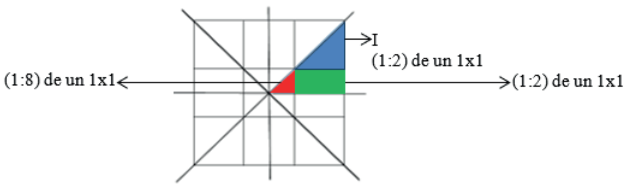


Figura 8: Cuadrado pitagórico partido en 8 partes

(1:2) + (1:2) + (1:8) todos a partir de 1x1 2 (1:2) + (1:8) a partir de 1x1
1 cuadrado + (1:8) a partir de 1x1.

En esta figura se observa que la octava parte del cuadrado pitagórico, lo que geométricamente también genera un triángulo, se compone por 1 triángulo (1:2), 1 rectángulo (1:2) y 1 triángulo (1:8). Lo que daría un total de 1 y (1:8) cuadrados 1x1.

Es importante resaltar que, para efectos de este trabajo, se usará la palabra división para hablar de la cantidad de cuadrados que generan un cuadrado pitagórico y la palabra partición para seccionar un cuadrado pitagórico. El siguiente ejemplo ilustra la observación (ver figura 9). El cuadrado pitagórico formado por 9 cuadritos, está dividido por 3 segmentos en cada lado y este se puede partir con 2 diagonales para generar 4 triángulos.

4.3 Sobre cómo hacer la división de forma exacta

Un cuadrado pitagórico par es aquél que tiene un número par de cuadrados 1x1, en caso contrario es impar.

Un cuadrado pitagórico par, puede tener un número de particiones (divisiones) par o impar, ejemplo de cuadrado Pitagórico impar con un número de particiones par (ver Figura 9):

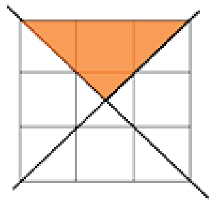


Figura 9: Cuadrado pitagórico impar con un número de particiones par

Por otro lado, ante la situación de tener un cuadrado pitagórico par con un número de divisiones impar (ver figura 10), se presenta un problema pedagógico al intentar explicar que la partición no queda exacta.

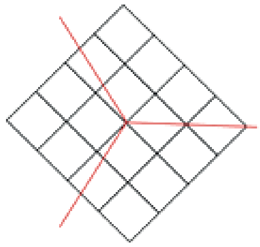


Figura 10: Cuadrado pitagórico par con un número de particiones impar

Una propuesta pedagógica para construir una fracción donde la división se dé en forma impar cuando se tiene un cuadrado pitagórico par, consiste en inscribir una circunferencia dentro de un cuadrado pitagórico. Contando la cantidad de cuadrados 1x1 exactos y lo que no se pueda contar genera una cantidad muy pequeña que se identificará con el nombre de cantidad infinitesimal ϵ (épsilon). En el caso de la figura 10 se puede expresar de la siguiente manera:

$$A\triangle\!\square = 4 \text{ cuadros} + 1 \text{ cuadro} + \epsilon$$

$$= 5 \text{ cuadros} + \epsilon$$

Lo que en notación decimal representa16:3 = 5,3

Es importante notar que una de las líneas no divide exactamente a un rectángulo 2x1. Lo que se puede traducir en una diferencia entre una cantidad sobrante con respecto a una cantidad exacta (ver Figura 11).

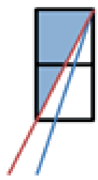


Figura 11: El rectángulo no está divido de forma exacta como muestra la línea roja, sino de forma inexacta como muestra la línea azul. La cantidad infinitesimal ϵ (épsilon) es el espacio comprendido entre la línea azul y la roja.

La línea roja representa la cantidad exacta, mientras que la línea azul representa la cantidad sobrante (lo que le falta a la roja para ser la azul, la llamada cantidad infinitesimal).

Así se define el número racional de manera geométrica, una cantidad infinitesimal o ϵ que se forma al tratar de partir un todo que no se puede dividir exactamente. Los números racionales son aquellos en los cuales no cabe el conteo motivado a que no hay forma de contar esto geométricamente de forma exacta. Existe una forma de calcular el valor de ϵ planteada por Arquímides que fue recopilada por Health (1956); sin embargo, este método no será desarrollado en este artículo.

Pedagógicamente este un concepto difícil de explicar y asimilar para niños de este nivel; sin embargo, se considera una estrategia adecuada para ser usada en grados superiores. En este nivel se puede usar la partición exacta para motivar el concepto del objeto fracción.

Finalmente se tienen todas las herramientas para representar fracciones de cualquier tipo usando un cuadrado pitagórico par o impar con diferentes números de divisiones.

Para explicar la adición y sustracción de fracciones, se requiere entender qué son las fracciones equivalentes. Esto, en términos geométricos, consiste en tener el mismo número de divisiones para un cuadrado pitagórico para un área particular.

4.4 Para explicar la adición y sustracción de fracciones

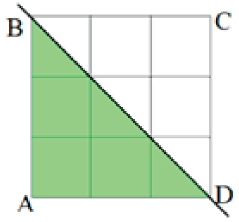
- Sobre fracciones equivalentes

Para explicar estos procesos se presentan dos casos:

Caso 1:

Cuando los cuadrados pitagóricos ABCD, LMKD son iguales (tienen el mismo número de divisiones) y el número de particiones es distinto.

Considere el cuadro pitagórico 3x3 ABCD y LMKD (ver figura 12 y 13):

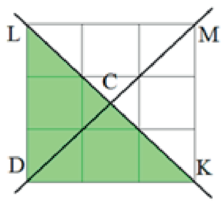


A□=9

A⊿=9(1:2)

$9(1:2) = 9:2$

Figura 12: Cuadrado pitagórico de 3x3 con dos partes



$9:2 = 2(9:4)$

$(9:4) + (9:4)$

La suma de cuadrados es lineal

A□= 9 = 4 (9:4)

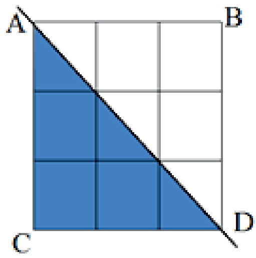
$A^{⊿}_{DLC} = A^{⊿}_{CDK} = (9:4)$

Figura 13: Cuadrado pitagórico de 3x3 con cuatro partes

Luego, por comparación, (9:2) = 2 (9:4).

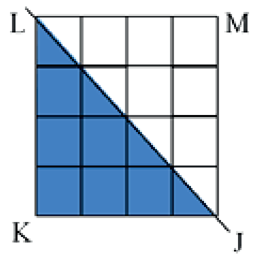
Caso 2:

Diferentes cuadrados pitagóricos ABCD y LMKJ con igual número de particiones y diferente número de divisiones.



$A^{⊿}_{DAC}$=9(1:2) = 4 y (1:2) medio cuadrados 1x1

Figura 14: Cuadrado pitagórico de 3x3 con dos partes



$A^{⊿}_{LKJ}$=16 (1:2) = 8 cuadrados 1x1

Figura 15: Cuadrado pitagórico de 4x4 con dos partes

Para poder generar una equivalencia entre estos dos cuadrados, se debe considerar sólo una dimensión de cada cuadrado pitagórico ABCD y LMNK. Se subdivide en 3 cada segmento de los lados del cuadrado pitagórico LMKJ y en 4 cada segmento de los lados del cuadrado pitagórico ABCD lo que garantiza que ambos cuadrados pitagóricos sean iguales (igual número de cuadrados internos). A continuación, se aplica el caso 1.

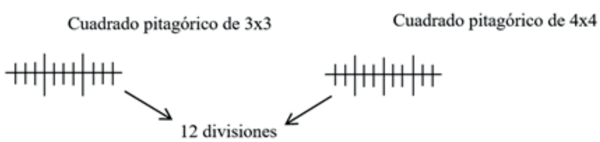


Figura 16: Si consideramos una dimensión de los cuadrados pitagóricos, dividimos cada segmento del cuadrado 3x3 en 4 partes y cada segmento del cuadrado 4x4 en 3 partes, observaremos ambos poseen 12 divisiones.

Una pregunta interesante que surge como consecuencia del caso 2 es ¿cuál es el menor número de divisiones sobre los lados de los cuadrados pitagóricos que se puede realizar para que éstos coincidan? Esta pregunta, a pesar de la dificultad, en niveles de educación primaria conlleva a un desarrollo matemático concreto y a definiciones más complejas sobre la teoría de números.

Entonces para realizar adiciones o sustracciones usando cuadrados pitagóricos con diferentes divisiones, hay que subdividir cada cuadrado pitagórico y comparar para mantener la proporción (es indispensable que el cuadrado mantenga la misma área, la longitud de sus lados). No hay forma que se pueda comparar si se cambia el cuadrado y no se mantiene el área.

Ahora se disponen de herramientas para definir geométricamente la adición de fracciones.

- Adición de fracciones

Se basa en el principio de agregar figuras geométricas (ver figura 17).

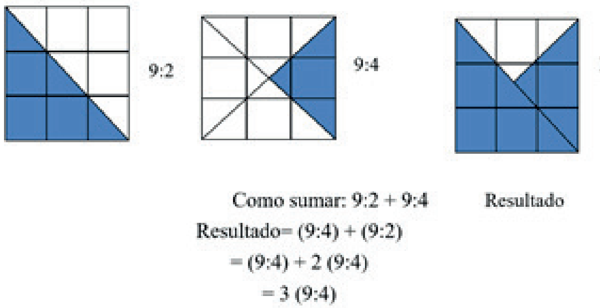


Figura 17: Adición geométrica de fracciones

- Sobre la sustracción

La sustracción se basa en quitar figuras geométricas (ver figura 18).

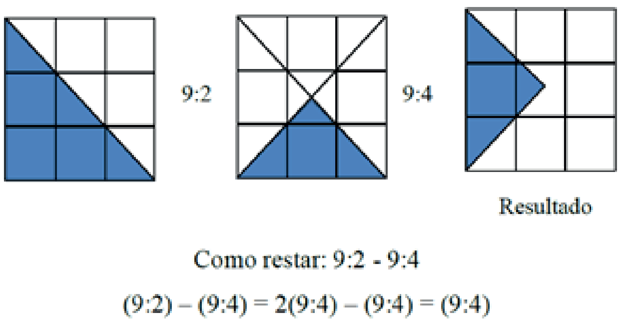


Figura 18: Sustracción geométrica de fracciones

Esto siempre que ambos cuadrados sean comparables, es decir, tengan una base común.

Al plantear la estrategia se entiende que existe la limitación del conocimiento previo necesario para iniciar la actividad. Si este no está presente, inicialmente el proceso de aprendizaje se hace más extenso y laborioso, ya que es necesario construir una base; sin embargo, llega a ser muy gratificante para el docente, pues el niño logra entender conceptos aún más abstractos. La estrategia planteada busca construir conocimiento a largo plazo.

El principal fin de utilizar este tipo de aproximación, es olvidarse del símbolo, hacer énfasis en la geometría y, a través de ella, entender el concepto de fracción de forma intuitiva. Una vez adquirida la comprensión del concepto se debe universalizar el conocimiento a través de símbolo.

Como se pudo observar, en esta estrategia se retoman las ideas griegas. Se habla del cuadrado pitagórico porque se utiliza como inspiración la división de la cuerda pitagórica sobre el monocordio.

En el caso presentado se utilizó el arte como estrategia; sin embargo, se puede aplicar a otras áreas del conocimiento por ejemplo la música, el deporte, etc., tal como muestra el trabajo de Atilano (2009).

V. Estrategia pedagógica

5.1 Fracciones con arte y geometría

Para aplicar la propuesta se diseñaron dos actividades didácticas:

- Nociones de fracciones: definición y sus tipos.
- Álgebra de fracciones: adición y sustracción.

Estas actividades fueron aplicadas en alumnos de quinto grado del Colegio Integral El Ávila, ubicado en Caracas, Venezuela. El quinto grado de este colegio, está formado por dos grupos mixtos de alumnos.

El estudio sobre el objeto fracción antes mencionado, se realizó a través de un reto artístico, la elaboración de un vitral para ser expuesto en la Semana del Arte del colegio.

Trabajar con vitrales supone un conocimiento previo o la necesidad de adquirir un conocimiento nuevo del área artística por sí solo. Esto es muy importante, ya que no sólo se persigue el aprendizaje del lenguaje matemático, sino que se busca la integralidad del conocimiento que es parte de la estrategia de aprendizaje. En este caso se están vinculando dos áreas que en la educación actual parecieran no tener relación: el arte y las matemáticas. Esto permite rescatar la idea de que la matemática es un lenguaje que se conecta con todas las otras áreas del conocimiento.

Para realizar el vitral, es necesario conocer qué es, realizar el diseño y calcular las pinturas que se necesitan para su elaboración. El vitral a realizar está inspirado en los inicios del arte cubista y basado en las formas geométricas cuadrado, rectángulo y triángulo.

Parte del conocimiento previo necesario para aprender sobre el objeto fracción son las definiciones de proporción, espacio y sistema de referencia.

En este caso proporción significa "…correspondencia debida de las partes de una cosa con el todo o entre cosas relacionadas entre sí" (RAE, 2001) y espacio significa "extensión que contiene toda la materia existente" (RAE, 2001).

En la primera actividad didáctica se trabajó sobre un cuadrado de papel de 15x15 cm para iniciar a los niños en la noción de proporción y el uso del espacio. Este trabajo previo permitió que en la siguiente actividad se pudieran hacer cálculos de materiales con base en un sistema de referencia común. Para este ejercicio los alumnos fueron sentados en se parejas, el trabajo lo realizó primero uno de los estudiantes y después el otro, de modo que se pudiera comparar en cada paso el antes y el después al comprobar el material que cada uno tenía en frente.

El área de 15 x 15 cm se partió de acuerdo a las instrucciones dadas por la maestra siguiendo el siguiente esquema:

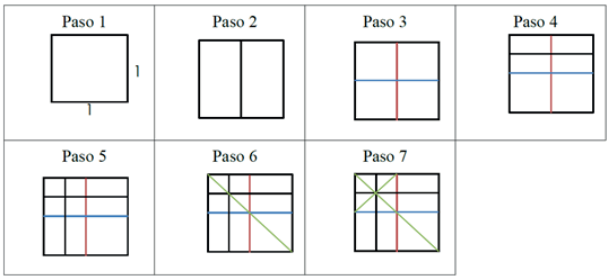


Figura 19: Esquema de los pasos para realizar el plegado de papel

Durante el proceso los niños compararon sus trabajos, mientras la docente utilizó preguntas generadoras para focalizar la atención en aspectos importantes e inducir al niño a la construcción progresiva del objeto fracción.

Algunas de las preguntas generadoras fueron:

¿Qué forma tiene nuestra área a trabajar?

¿Qué es un cuadrado?

¿Cuáles figuras se forman cuando realizamos la partición (división)?

¿Cuántas partes se tiene ahora?

¿Cuántos cuadros se necesitan para formar un rectángulo?

¿Es lo mismo tener 1 parte (pedazos, trozos) de un cuadrado dividido en 2 partes, que 2 partes de un cuadrado dividido en 4 partes como tiene su compañero?

¿Qué forman dos rectángulos pequeños?

¿Qué hemos estado haciendo?

¿Cómo ha sido esta partición?

¿Qué es cada pedazo de ese cuadrado?

En esta actividad se pudo apreciar el todo como la región a partir, y que ese todo (el universo, él área, el cuadrado de papel) se conserva, aún cuando se realizaron particiones. El área a trabajar permaneció; sin embargo, podía considerarse cada parte de ese todo como un todo a su vez y hacer particiones sobre él, siendo esta partición equitativa o proporcional. Los alumnos establecieron equivalencias como 2 cuadrados medianos equivalen a un rectángulo grande, cuatro cuadrados pequeños a un rectángulo mediano, cuatro cuadrados pequeños a un cuadrado mediano, un rectángulo grande a un triángulo grande, dos triángulos pequeños a un cuadrado pequeño, adquirieron nociones de área (la región que se dividió), dimensión (se trabajó con un área cuadrada, el cuadrado es una figura bidimensional) y espacio. Gracias a la mediación docente los niños hicieron la transición de la primera partición geométrica a la simbólica, estableciendo conexión entre la operación algebraica de división y el objeto fracción. Igualmente se estableció una referencia que permitió hablar en términos de cuadrados, triángulos o rectángulos pequeños, medianos, grandes sin confusión.

Durante el proceso fue muy importante la comparación, ya que cada nuevo paso podía ser contrastado con el anterior, por lo que los alumnos pudieron observar la transformación, establecer equivalencias visualmente e incluso experimentar a través de la superposición de sus áreas de trabajo.

Con esta actividad se buscó la comprensión de los símbolos en la medida que el alumno entendía el significado geométrico.

En la segunda actividad se solicitó a los alumnos que utilizaran 3 colores para rellenar algunas de las partes resultantes de la partición anterior. Para hacer el coloreado se debía tomar en cuenta dos condiciones: se debía usar la misma cantidad de cada color y cada parte debía tener un único color. A continuación, se les pidió calcular el área total de los colores utilizados en diferentes términos (con base en cuadrados pequeños o rectángulos, etc.) para hacer un cálculo de pintura (ver figura 20).

Figura 20: Ejemplos de coloreado equitativo

Una vez que los alumnos mostraron dominio de la partición proporcional del espacio y el coloreado equitativo, se trabajó con particiones diferentes y se invitó a los alumnos a calcular el total de partes iguales que tenían de cada color.

Finalmente, se realizó un ejercicio con un área igual a la anterior (15 x 15) y particiones iguales. Los alumnos rellenaron con color a su gusto, manteniendo la condición anterior de que cada parte del todo debía contener sólo un color y al terminar debían contar cuántas partes de cada color tenía cada pareja. Luego se unieron varias parejas y se realizó nuevamente el conteo. También se realizó un conteo en forma inversa, es decir, todos los alumnos del salón tienen un total de partes de un color, si quitamos lo que tiene un grupo queda una cantidad diferente de partes (ver figura 21).

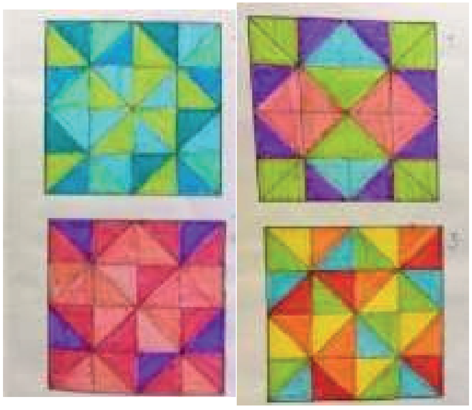


Figura 21: Ejemplos de imágenes para realizar el conteo

De esta manera los alumnos, de forma muy intuitiva y concreta pudieron resolver adiciones y sustracciones de fracciones con igual y diferente denominador, sin tener que usar símbolos, únicamente geometría. El cierre de la actividad lleva forzosamente al símbolo, ya que es la forma en que el lenguaje matemático se universaliza, sin embargo, esta simbología está llena de contenido, y se sustenta en la comprensión adquirida por el niño al trabajar primero a nivel concreto.

VI. Consideraciones finales

Una vez aplicada la propuesta se identificaron claramente fortalezas y debilidades en ella. Si bien se encontraron debilidades, las fortalezas las superaron con creces e hicieron pensar que este tipo de estrategias deben utilizarse.

Las fortalezas fueron:

Se estableció una relación directa entre el área artística y la matemática, evidenciando que hoy más que nunca es posible brindar a los alumnos la integralidad del conocimiento, ampliar su aprendizaje a materias y temas que no forman parte del currículo.

El uso de la comparación como herramienta de aprendizaje, fue a través de ella que los alumnos construyeron gran parte del conocimiento en estas actividades, les permitió una reversibilidad inmediata de su trabajo (ver cómo estaba el cuadrado de papel antes de cumplir la instrucción dada) e incluso los incentivó a hacer proyecciones sobre lo que pasaría si hicieran particiones de una u otra manera.

A través del trabajo en equipo se puede aprender. Las actividades fueron creadas para trabajarse no como individuos sino como pequeños grupos, por ello la construcción del conocimiento se dio de forma grupal igualmente, cada paso fue discutido, comentado y reflexionado por más de un estudiante, esto llevó el trabajo a un nivel de mayor profundidad que la inicialmente esperada.

Rescate del error como medio de aprendizaje y disminución del miedo a equivocarse, los alumnos fueron capaces de detectar errores y cuestionarse sin que esto generara emociones negativas ni frustraciones.

Se observó una gran motivación intrínseca (propia de cada alumno) por parte de los alumnos hacia la actividad. Hubo entusiasmo, impaciencia, ilusión, emociones que no son comunes en una clase tradicional de matemática.

Se rescató el valor recreativo del proceso de aprendizaje, no sólo se aprende jugando en preescolar, también es posible disfrutar y aprender jugando en una clase de matemática de los últimos grados de primaria. Los alumnos del grupo en que se aplicó la actividad sin duda lo hicieron.

Motivación al lenguaje matemático a través de actividades dentro y fuera del salón.

Desarrollo del razonamiento espacial a través del trabajo de la geometría euclidea.

Comprensión concreta del objeto fracción por parte de los alumnos de inclusión. Recordemos que los alumnos de inclusión requieren de adaptaciones o acompañamiento personalizado durante el desenvolvimiento de las actividades académicas; sin embargo, al aplicar esta estrategia estos alumnos no necesitaron de ningún tipo de adaptación o apoyo para lograr la construcción de los conceptos.

Se rescata el uso del reto cognitivo como punto de inicio del aprendizaje, ya que se invitó al niño a resolver un problema para lo cual debía hacer uso del razonamiento y no de destrezas mecánicas.

Las debilidades fueron:

Se requiere de un conocimiento previo. Para la elaboración de un vitral el niño debe tener cierta base de conocimiento artístico, de no tenerla, es necesario el aprendizaje de estas nociones antes de entrar en materia.

Para impartir a los niños la base del conocimiento artístico requiere una inversión mayor de tiempo, en ocasiones esto requiere más tiempo del disponible para una clase.

Al requerir el desarrollo de un conocimiento artístico previo, se puede generar dispersión en el alumno, desviando su atención del contenido a estudiar.

Al realizarse la indagación inicial sobre los conocimientos previos para la realización de la actividad didáctica, se evidenció deficiencia en nociones de geometría como áreas, dimensiones y figuras. Esta deficiencia se refleja en el razonamiento geométrico y conlleva a una falta de entendimiento de las fracciones. Es necesario el conocimiento sobre congruencia de triángulos, construcción de cuadrados y partición de objetos para realizar las actividades anteriormente propuestas, por lo que el desconocimiento de la geometría es una limitante.

Por ello se considera necesario sembrar la geometría para explicar un concepto matemático más abstracto como lo es las fracciones.

Para cerrar citamos las palabras de Liliana Pazos (2009) a manera de reflexión:

Habitualmente, los maestros decimos que las fracciones son un problema a la hora de enseñarlas. Juguemos con las palabras y cambiemos el "es un problema para nosotros enseñar fracciones" por "presentemos las fracciones de manera que originen un problema desafiante para los alumnos". (p. 45)

Referencias

Atilano, D. (2009). Pitágoras: número, música y proporción. Revista UCSAR, 2, 9-27.

Ausubel, D., Novak, Joseph D. & Hanesian, H. (1983). Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo. México: Trillas.

Bryne, O. (2010). Los elementos de Euclides: Los primeros 6 libros. España: Taschen.

Bruner, J. (1977). The Process of Education. Massachusetts, EE.UU: Harvard University Press.

Craig, G. (1997). Desarrollo Psicológico. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.

De Guzmán, M. & Navarro, M. (s.f.) Tendencias Innovadoras en Educación Matemática. Recuperado el 25 de agosto de 2013, del Sitio Web de la Universidad Complutense de Madrid: http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/educacion/tendenciasInnovadoras

De León, H. (1998). Procedimientos de niños en primaria en la solución de problemas de reparto. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1, 5-20.

Diccionario de la Real Academia Española. (21ª. ed.). (2001). Recuperado el 28 de agosto de 203, del Sitio Web de la Real Academia dela Lengua Española: http://lema.rae.es/drae/?val=proporcion

Diccionario de la Real Academia Española. (21ª. ed.). (2001). Recuperado el 28 de agosto de 203, del Sitio Web de la Real Academia dela Lengua Española: http://lema.rae.es/drae/?val=espacio

Gallardo, J., González, J. L. & Quispe, W. (2008). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11(3): 355 – 382.

Gorman, R. (1972). Introducción a Piaget. Buenos Aires: Editorial Paidós.

Guzmán, I. & Olfos, R. Dificultades en el aprendizaje de las fracciones y el conocimiento del profesor. XIII CIAEM-IACME, 1-11.

Health, T.L.(1956) The thirteen books of Euclid´s elements. Volume I-II. New York: Dover Publications.

Health, T.L.(1956) The Works of Archimedes. Estados Unidos: Dover Publications.

Hincapié, C. (2011). Construyendo el concepto de fracción y sus diferentes significados con los docentes de primaria de la institución educativa San Andrés de Girardota. Tesis de maestría no publicada, Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

Hinds, J. (1998). Matemática 5. Venezuela: Editorial Premier SRL.

Labinowicz, Ed. (1982). Piaget en el aula. México: Fondo Educativo Interamericano.

Llinares, S. y Sánchez, M. (1988). Fracciones. La relación parte-todo. Madrid: Síntesis.

Martínez, C. & Lascano, M. (2001). Acerca de las dificultades para la enseñanza y el aprendizaje de las fracciones. Revista EMA, 6(2), 159-179.

Matemática 5. Espiral de números. (1ra edición). (2012). México: Pearson.

Molina, Y., Hinds, J., Di Parsia, A., Hinds, W., Parra, L. & Oliveira, J. (1999). Matemática 5. Venezuela: Editorial Monfort.

Navarro, C., García, E. & Ruíz, H. (2004). Matemática 5. Venezuela: Santillana.

Papalia, D.; Olds, S. (1998). Psicología del desarrollo. Bogotá: McGraw Hill.

Pazos, L.(2009). Las fracciones son un problema. Quehacer educativo, 40-45.

Pérez, R. (2009). El constructivismo en los Espacios Educativos. República Dominicana: Editorama, S.A.

Piaget, J. (1977). La explicación en las ciencias (Coloquio de la Academia Internacional de Filosofía de las Ciencias, Ginebra, 1970). Barcelona, España: Ediciones Martínez Roca.

Pruzzo, V. (2012). Las fracciones: ¿Problema de aprendizaje o problemas de la enseñanza?. Pilquen, 8, 1-14.

UNESCO. (2017). Ficha informativa No. 46. Recuperado de http://uis.unesco.org/sites/default/files/documents/fs46-more-than-half-children-not-learning-2017-sp.pdf

Valdemoros, M. (2010). Dificultades experimentadas por el maestro de primaria en la enseñanza de las fracciones. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13(4-II): 423-440.

Vergnaud, G. (1991). El Niño, las Matemáticas y la Realidad. México: Editorial Trillas.

Vygotski, L. (2000). El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Barcelona, España: Crítica.