

MODELO DE PREDICCIÓN ESPACIAL DE ONDULACIÓN GEOIDAL, PARA EL ÁREA URBANA DE QUITO, UTILIZANDO TÉCNICAS GEOESTADÍSTICAS

SPATIAL PREDICTION MODEL OF GEOID UNDULATION IN QUITO URBAN AREA USING GEOSTATISTICAL TECHNIQUES

CÉSAR ALBERTO LEIVA GONZÁLEZ^{1,2}; NELSON ALEJANDRO ARAUJO GRIJALVA²; XAVIER EDUARDO BUENAÑO GUERRA³

¹UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS – ESPE. Av. Gral. Rumiñahui s/n, Sangolquí, Ecuador. caleiva@espe.edu.ec

²ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL – EPN. Ladrón de Guevara E11-253, PO-Box 17-01-2759, Quito, Ecuador. alejandro.araujo@epn.edu.ec

³UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID. Ríos Rosas 21, Madrid, España. xgoodyear@gmail.com

Recibido: 08 de abril de 2017 / Aceptado: 13 de junio de 2017

RESUMEN

El presente estudio tiene como objetivo la determinación de un modelo de predicción espacial de la variable ondulación geoidal para la zona urbana del cantón Quito utilizando técnicas geoestadísticas. El primer paso para la obtención del modelo es el análisis exploratorio de datos, seguido del análisis estructural, a través de la modelación de un variograma omnidireccional bajo el supuesto de isotropía, y la predicción espacial, utilizando el predictor de Kriging ordinario. El modelo obtenido se lo representa a través de un mapa de predicción. Finalmente, el modelo geoestadístico, se lo compara con los modelos globales EGM96, EGM08 y el modelo local “NEURONAL PARA LA PREDICCIÓN DE LA ALTURA GEOIDAL LOCAL EN EL ECUADOR”, que actualmente se usan en el área de estudio. Los datos geodésicos utilizados en este estudio fueron proporcionados por el Instituto Geográfico Militar del Ecuador.

Palabras clave: GPS, Geoestadística, variograma, Kriging, Geodesia.

ABSTRACT

The objective of this study is the determination of a spatial prediction model for geoid undulation in Quito urban area using geo-statistical techniques. The first step in order to get the model is the computation of omnidirectional variogram assuming isotropy, following with a spatial prediction through ordinary Kriging. The obtained model is shown through a prediction map. Finally, the geostatistical model is compared with EGM96 and EGM08 global models and the local model named “Neural for the Prediction of Local Geoidal Heights in Ecuador” which are currently used in the study area. The geodetic data employed in this study were provided by Instituto Geográfico Militar of Ecuador.

Keywords: GPS, Geostatistics, variogram, Kriging, Geodesy.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad, el posicionamiento GPS (*Global Positioning System*), por su costo y rapidez, es una actividad que se realiza a diario, con el objetivo de conocer la ubicación geográfica de algo o alguien, de manera precisa o aproximada; la técnica como tal ha resuelto la determinación de las coordenadas horizontales, llámense éstas: latitud geográfica y longitud geográfica o coordenadas planas proyectadas x , y ; pero lamentablemente, cuando nos referimos a la altura del punto sobre el nivel medio del mar, que es lo que se utiliza habitualmente para la mayoría de aplicaciones en ingeniería, la técnica GPS no ha podido resolver este problema, ya que por principio la altura que entrega el GPS está referida al elipsoide de referencia y no al nivel medio del mar, que es la superficie de referencia que se utiliza para determinar la altura de un punto sobre la superficie topográfica, por su carácter físico. Actualmente, existen modelos gravimétricos mundiales, como el EGM96 (*Earth Gravitational Model 1996*) o el EGM08 (*Earth Gravitational Model 2008*), que facilitan la transformación de alturas elipsoidales a alturas sobre el nivel medio del mar, a través del cálculo de la ondulación geoidal, actualmente, denominada altura geoidal (Fig. 1), que se la define como la diferencia entre el elipsoide global de referencia y el geoide, que para nuestro estudio lo vamos a considerar coincidente con la superficie de referencia materializada por el nivel medio del mar, o en su defecto la diferencia entre la altura elipsoidal y la altura nivelada sobre el nivel medio del mar. El problema de estos modelos, en nuestro país, es el grado de precisión con la cual se obtiene las ondulaciones geoidales y por ende las alturas sobre el nivel medio del mar, llegando a errores de varios metros, que, para muchas aplicaciones, especialmente las de ingeniería no permiten utilizar GPS para el posicionamiento vertical.

Por otro lado, el Instituto Geográfico Militar, ha publicado en el año 2015, un modelo local para el cálculo de la altura geoidal en el Ecuador, denominado “MODELO NEURONAL PARA LA PREDICCIÓN DE LA ALTURA GEOIDAL LOCAL EN EL ECUADOR”, que según Tierra & Acurio (2016), calcula alturas geoidales locales con errores menores a 40 cm.

El objetivo de este estudio es utilizar técnicas geoestadísticas, para conseguir un modelo de predicción de la variable ondulación geoidal, partiendo de muestras de puntos geodésicos del Instituto Geográfico Militar (IGM), distribuidos en la zona urbana del cantón de Quito, ubicada en la cordillera de los Andes y caracterizada por una topografía irregular, en donde se conoce la altura elipsoidal (h), determinada a través de técnicas GPS y altura nivelada sobre el nivel medio del mar referido al mareógrafo de La Libertad (H), obtenida a partir de procesos de nivelación geométrica, por lo que es posible conocer la ondulación geoidal (η) a través de (1).

$$\eta \approx h - H \quad (1)$$

La ecuación (1) representa un modelo determinístico, sin embargo, el nivel de precisión de las técnicas utilizadas en las mediciones GPS y de nivelación geométrica; así como el hecho de que la altura elipsoidal se mide a lo largo de la normal al elipsoide en el punto de observación y la altura nivelada se mide a lo largo de la vertical (dirección de la línea de la plomada en el instante de medición); es necesario considerar un ruido estocástico (ϵ), por lo que el modelo determinístico planteado inicialmente se convierte en un modelo probabilístico, expresado de la siguiente manera:

$$\eta \approx h - H + \epsilon \quad (2)$$

Mejorar la determinación de la variable ondulación geoidal, en la zona de estudio, potencia el uso de la técnica GPS en el posicionamiento vertical, lo que se traduce en la práctica en la reducción de costos en proyectos, especialmente de Ingeniería y de las Geociencias, que requieran la determinación de altura sobre el nivel medio del mar de puntos sobre la superficie topográfica.

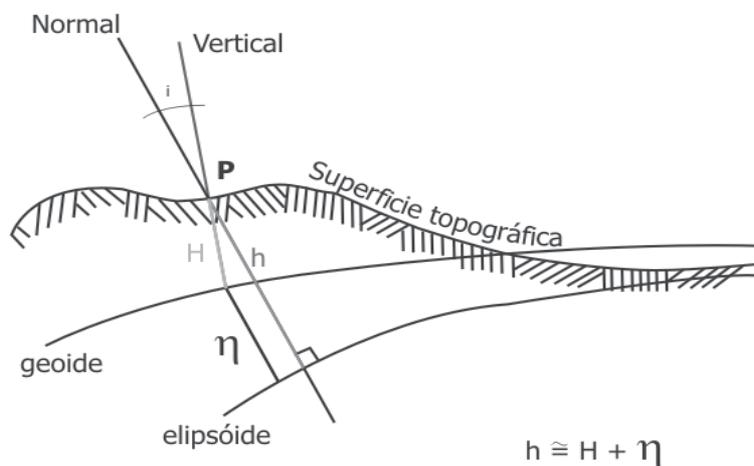


Figura 1. Determinación de la Ondulación Geoidal
(Adaptado de Drewes & Sánchez, 2002)

MARCO TEÓRICO

GEOIDE

Según Moritz & Heiskanen (1985), la superficie de los océanos es, después de una ligera idealización, parte de una cierta superficie de nivel. Esta superficie equipotencial particular fue propuesta por el “Príncipe de la Matemática”, C.F. Gauss, como la figura matemática de la Tierra y después fue llamada geode (Fig. 2). En este estudio consideramos coincidente el geode con la superficie materializada por el nivel medio del mar.

ELIPSOIDE

Debido a la forma irregular del geoide que no permite una comprensión fácil de la posición horizontal de puntos, nace la necesidad de tener una superficie de referencia de forma regular, usualmente un elipsoide biaxial. Dicho elipsoide se obtiene haciendo girar una elipse meridiana en torno a su eje menor (Fig. 3). Usualmente, un elipsoide biaxial es definido por el semieje mayor (a) y el achatamiento (f). Sobre esta superficie se miden las coordenadas Geográficas. Ejemplos de elipsoides usados en Geodesia son: GRS80, utilizado por el ITRF (International Terrestrial Reference Frame) para calcular las coordenadas geográficas; y, el WGS84, utilizado por el marco WGS84 (Drewes & Sánchez, 2002).

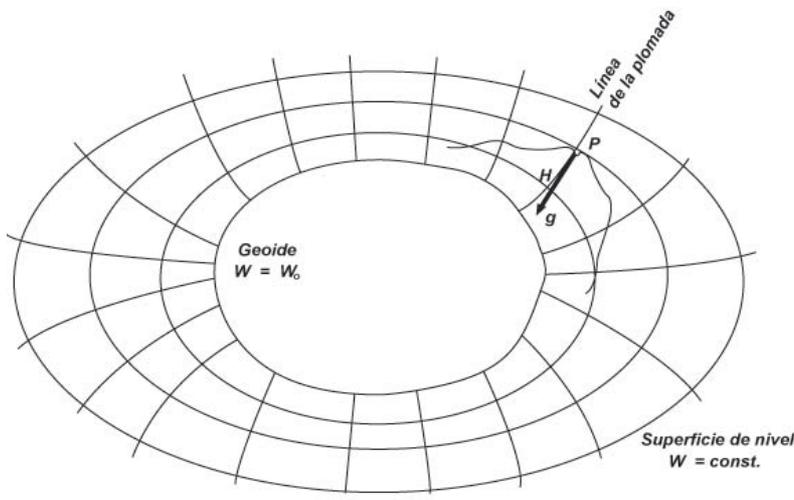


Figura 2 Geoide
(Adaptado de Heiskanen & Moritz, 1985)

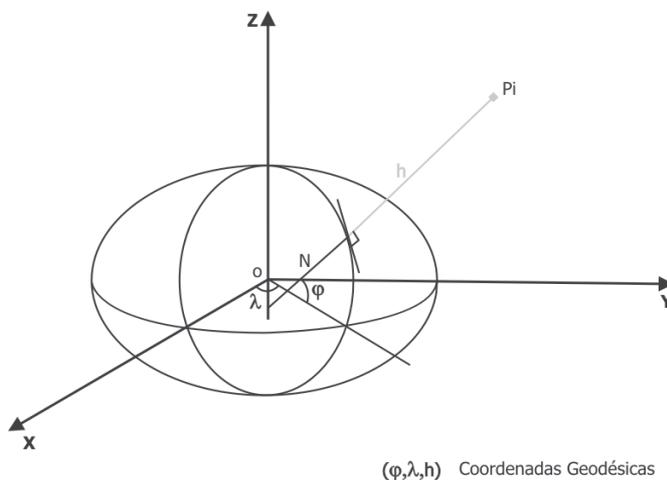


Figura 3 Sistema de Coordenadas Geográficas
(Adaptado de Drewes & Sánchez, 2002)

RELACIÓN ENTRE GEOIDE, ELIPSOIDE Y SUPERFICIE TOPOGRÁFICA

La relación entre la superficie topográfica, el elipsoide y el geoide (Fig. 1) es obtenida mediante la ondulación geoidal (h), que aproximadamente es igual a la diferencia entre la altura elipsoidal y la altura nivelada sobre el nivel medio del mar, según la ecuación (1).

COORDENADAS GEODÉSICAS

El origen del sistema es el centro geométrico del elipsoide. El eje Z está en la dirección del polo norte y sobre éste se define el semieje menor del elipsoide (b), el eje X se encuentra sobre el plano ecuatorial en dirección al meridiano de referencia y sobre éste se define el semieje mayor del elipsoide (a). Las coordenadas derivadas de este sistema son: latitud (j), longitud (l) y altura elipsoidal (h) (Fig. 3).

ALTURAS ELIPSOIDALES

Las alturas elipsoidales (h) representan la separación entre la superficie topográfica terrestre y el elipsoide. Dicha separación se calcula sobre la línea perpendicular al elipsoide. Las alturas elipsoidales son obtenidas a partir de las coordenadas geocéntricas cartesianas (X, Y, Z) definidas sobre un elipsoide de referencia y determinadas a partir del posicionamiento satelitario de los puntos de interés.

Debido a la utilización masiva de la técnica GPS, es indispensable considerar este tipo de alturas en los registros oficiales de las cantidades directamente medidas. Sin embargo, como éstas no consideran el campo de gravedad terrestre en su determinación, pueden presentar valores iguales en puntos con niveles diferentes, o viceversa, haciendo que su aplicación práctica sea mínima. Tal circunstancia exige que éstas sean complementadas con otro tipo que sí considere el campo de gravedad terrestre (Blitzkow, et al., sf).

ALTURAS NIVELADAS

Son las obtenidas bajo el proceso de nivelación geométrica con métodos ópticos de medición. Las diferencias de nivel observadas varían de acuerdo con el campo de gravedad inherente al sitio en consideración.

En la Figura 4 las cantidades observadas (dn) corresponden con la distancia existente entre las superficies equipotenciales del campo de gravedad terrestre y su sumatoria permite conocer la diferencia de altura entre los puntos de interés. No obstante, debido a la forma elipsoidal de la Tierra y a la distribución irregular de sus masas internas, las superficies equipotenciales no son equidistantes; los valores de desnivel entre éstas, varían de acuerdo con el trayecto de medición.

Como estas alturas dependen del camino descrito en el proceso de nivelación, fácilmente pueden obtenerse diferentes valores de altura para un mismo punto, haciendo que sean utilizadas en áreas pequeñas que no requieren considerar ni la figura elipsoidal de la Tierra ni las variaciones de su campo de gravedad (Blitzkow, et al., sf).

Las alturas niveladas sobre el nivel medio del mar, son las que, en la actualidad, reporta el IGM en los diferentes proyectos que realiza y son las que se utilizan en este estudio.

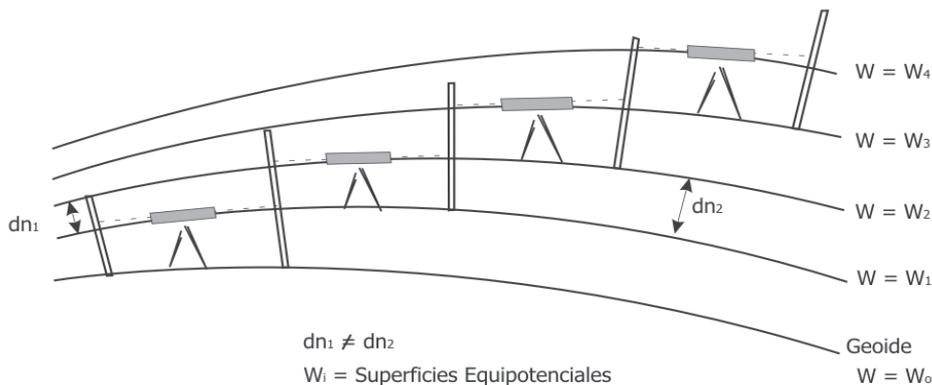


Figura 4 Alturas Niveladas
(Adaptado de Blitzkow, et al., sf)

ONDULACIÓN GEOIDAL

Según Mena (2008), la ondulación geoidal es la separación existente, medida sobre la normal al elipsoide, entre el geoide y el elipsoide de referencia. Esta magnitud, en la práctica, se utiliza para obtener la altura sobre el nivel medio del mar, a partir de la altura elipsoidal, derivada del posicionamiento GPS.

MODELO EGM96

El EGM96 es un modelo gravimétrico mundial desarrollado por la Agencia Nacional Geoespacial de Inteligencia de los Estados Unidos (NGA), la NASA y la Universidad Estatal de Ohio (OSU), para el cálculo de la ondulación geoidal respecto al elipsoide WGS84. Este modelo es completo hasta el grado y orden 360 de los armónicos esféricos del potencial gravitacional de la Tierra.

MODELO EGM08

El EGM08 es el modelo gravimétrico más moderno de la serie EGM, publicado por la NGA, para el cálculo de la ondulación geoidal. Este modelo gravitacional es completo hasta el grado y orden de armónicos esféricos 2159, y contiene coeficientes adicionales hasta el grado 2190 y el orden 2159. Con este modelo se calcula los valores de ondulación geoidal con respecto al elipsoide WGS84 para cualquier parte del mundo.

MODELO NEURONAL PARA LA PREDICCIÓN DE LA ALTURA GEOIDAL LOCAL EN EL ECUADOR

Según Tierra & Acurio (2016), modelo geoidal local, obtenido mediante la utilización del método geométrico, con datos provenientes de GPS y nivelación geométrica a través del uso de la técnica de redes neuronales artificiales para modelar un geode local para el Ecuador Continental. Los resultados obtenidos por Tierra & Acurio (2016) muestran que, con este modelo, se pueden obtener errores menores a 40 cm., en el cálculo de la altura geoidal.

GEOESTADÍSTICA

UN ENFOQUE ESTOCÁSTICO PARA LA VARIACIÓN ESPACIAL

Según Oliver (2010) la variación espacial de la mayoría de las propiedades en, sobre, o bajo la superficie de la Tierra es tan compleja que llevó a Matheron (padre de la geoestadística) a encontrar un enfoque alternativo al tradicional determinista para su análisis. La aproximación que adoptó fue una que podría hacer frente a la incertidumbre inherente de los datos espaciales, de manera estocástica. La base de la geoestadística moderna es tratar a la variable de interés como una variable aleatoria. Esto implica que, para cada punto x , en el espacio, hay una serie de valores para una propiedad, $Z(x)$, y el valor observado, $z(x)$, se extrae aleatoriamente según cierta ley, de alguna distribución de probabilidad. En x , una propiedad $Z(x)$, es una variable aleatoria con media, μ , y varianza, σ^2 .

TEORÍA GEOSTADÍSTICA Y VARIABLES REGIONALIZADAS

El conjunto de variables aleatorias, $Z(x_1), Z(x_2), Z(x_3), \dots, Z(x_n)$ es un proceso aleatorio y el actual valor de Z observado es solo un número cualquiera entre las potenciales realizaciones de este proceso. Para describir la variación del proceso aleatorio subyacente, podemos utilizar el hecho de que los valores de las variables regionalizadas en lugares cercanos entre sí tienden a ser autocorrelacionadas. Por lo tanto, se puede estimar la covarianza espacial para describir esta relación entre pares de puntos; para una variable aleatoria, está dada por (3).

$$C(x_1, x_2) = E\{[Z(x_1) - \mu(x_1)][Z(x_2) - \mu(x_2)]\} \quad (3)$$

Siendo: $\mu(x_1)$ y $\mu(x_2)$ las medias de Z en x_1 y x_2 , y E denota el valor esperado.

Como solo hay una realización de Z en cada punto, esta solución no está disponible debido a que las medias son desconocidas. Para continuar se debe invocar supuestos de estacionariedad.

ESTACIONARIEDAD

Bajo los supuestos de estacionariedad ciertos atributos del proceso aleatorio son los mismos en cualquier lugar. Suponemos que la media, $\mu = E[Z(x)]$, es constante para todo x , y entonces $\mu(x_1)$ y $\mu(x_2)$ pueden ser remplazados por μ , la cual puede ser estimada por muestreo repetitivo. Cuando x_1 y x_2 coinciden, la ecuación (3) define la varianza (o la varianza a priori del proceso), $\sigma^2 = E[\{Z(x) - \mu\}^2]$, que se supone es finita, y como para la media, constante en todas partes. Cuando x_1 y x_2 no coinciden, su covarianza depende de su separación y no de sus posiciones absolutas, y esto se aplica a cualquier par de puntos x_i , x_j separados por la distancia $d = x_i - x_j$ (un vector en distancia y dirección), de modo que:

$$C(x_i, x_j) = E[\{Z(x_i) - \mu\} \{Z(x_j) - \mu\}] = E[\{Z(x)\} \{Z(x+d)\} - \mu^2] = C(d) \quad (4)$$

que también es constante para un determinado d . La distancia d se conoce como paso ("lag" en inglés). Esta constancia del primero y segundo momento del proceso constituye la estacionariedad débil o de segundo orden. La ecuación (4) indica que la covarianza es una función de la distancia d , y esta describe cuantitativamente la dependencia entre los valores de Z con cambios de d . La autocovarianza depende de la escala en la que Z es medida; por lo tanto, a menudo se considera la autocorrelación adimensional, $\rho(d)$, dada por:

$$\rho(d) = C(d)/C(0), \quad (5)$$

En donde $C(0) = \sigma^2$, es la covarianza en el paso $d=0$.

VARIACIÓN INTRÍNSECA

La media a menudo podría cambiar a lo largo de una región, y la varianza parecería incrementarse indefinidamente con el incremento de la extensión del área. Consecuentemente, no existen valores de μ para ingresar en la ecuación (4) y la covarianza no puede ser determinada. Esta es una flaqueza de la estacionariedad débil. La solución de Matheron a esto fue la hipótesis intrínseca de la geoestadística. Aunque la media general podría no ser constante, ésta podría serlo para pequeñas distancias del paso, y así las diferencias esperadas serían nulas, de manera que:

$$E[Z(x) - Z(x+d)] = 0 \quad (6)$$

Al remplazar las covarianzas por la esperanza de las diferencias al cuadrado, se obtiene:

$$E[\{Z(x) - Z(x+d)\}^2] = \text{var}[Z(x) - Z(x+d)] = 2\gamma(d) \quad (7)$$

La cantidad $\gamma(d)$ es conocida, como la semivarianza en el paso d , o la varianza por punto cuando los puntos se consideran en pares. Como en la covarianza, la semivarianza depende solamente del paso d y no de las posiciones absolutas de los datos. La función $\gamma(d)$ es el semivariograma, hoy en día usualmente llamado variograma.

Si el proceso $Z(x)$ es estacionario de segundo orden, el variograma y la covarianza son equivalentes según (8).

$$\gamma(d)=C(0)-C(d)=\sigma^2 \{1-\rho(d)\} \quad (8)$$

Sin embargo, si el proceso es solamente intrínseco, no hay equivalencia porque la función covarianza no existe. No obstante, el variograma es válido y se lo puede aplicar más ampliamente que la función covarianza. Esto hace que el variograma sea una herramienta valiosa y como consecuencia, es el núcleo de la geoestadística (Oliver, 2010).

ESTIMACIÓN DEL VARIOGRAMA

Según Oliver (2010), el método de Matheron del estimador de momentos (MoM) es el método más usual de cálculo de las semivarianzas empíricas de los datos $z(x_1), z(x_2), \dots, z(x_n)$. Su ecuación es:

$$\hat{\gamma}(d) = \frac{1}{2m(d)} \sum_{i=1}^{m(d)} \{z(x_i) - z(x_i + d)\}^2 \quad (9)$$

En donde $z(x_i)$ y $z(x_i+d)$ son los actuales valores de Z en los sitios x_i y x_i+d , y $m(d)$ es el número de comparaciones en pares en el paso d . El variograma experimental o muestral se obtiene haciendo variar d (Oliver, 2010).

Según Webster y Oliver (citados por Oliver, 2010) se ha demostrado que se requiere al menos 100 puntos de muestreo para estimar el variograma por el método de momento de forma fiable, pues sus resultados con pocos datos demostraron claramente no ser buenos.

MODELAMIENTO DEL VARIOGRAMA

El método de momentos estima el variograma subyacente (el cual es una función continua), considerando un conjunto de puntos discretos a intervalos particulares de paso. Estas estimaciones a menudo varían de punto a punto, ya que están sujetas a errores que surgen en gran parte de la toma de muestras. Para describir la variación espacial, se ajusta un modelo a los valores experimentales. Los modelos teóricos que se usan para este propósito, incluyen funciones acotadas (delimitadas), como los modelos gaussiano, esférico y exponencial, que representan procesos que son estacionarios de segundo orden, y funciones no acotadas (no delimitadas), como los modelos logarítmicos, potencia y lineal, que representa procesos únicamente intrínsecos

Alfaro (2007), indica que en algunas ocasiones se puede ajustar un modelo correspondiente a la suma de dos o más modelos, llamado modelos anidados. La suma de dos modelos de variograma constituye un modelo autorizado, cuya ecuación se puede ver representado por la siguiente expresión (10).

$$\gamma(d)=\gamma_1(d)+\gamma_2(d) \quad (10)$$

Renard & Ors (2014), describen varias estructuras que utiliza la librería RGeostats del entorno y software estadístico R, usado en este estudio, para ajustar un modelo teórico a los variogramas experimentales.

PREDICCIÓN ESPACIAL ÓPTIMA

Kriging (Krigado en español) es a menudo conocido como el mejor predictor lineal insesgado (BLUE: Best Linear Unbiased Predictor); es un método de predicción espacial óptimo. Kriging es óptimo en el sentido de insesgado y de varianza mínima. Este es el método de interpolación de datos dispersos para procesos espaciales aleatorios.

CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL KRIGING

La mayoría de características del medio ambiente (atmósfera, minerales, suelos, vegetación, agua y océanos) pueden ser medidas en un número infinito de lugares, pero por razones económicas, solo son medidas en pocos. Varios métodos matemáticos (determinísticos) de interpolación están disponibles, por ejemplo: polígonos de Thiessen, triangulación, interpolación del vecino natural, función inversa de la distancia, mínimos cuadrados polinomiales (“trend surface” -superficie de tendencia) and “splines”. Laslett et al. (citado por Oliver, 2010), comparó varios de estos métodos con Kriging, y demostró que Kriging fue el mejor. Kriging supera muchas de las deficiencias de los métodos matemáticos de interpolación, tomando en cuenta la forma en que una propiedad varía en el espacio a través del variograma o la función covarianza.

Además, Kriging ofrece no sólo predicciones, sino también las varianzas Kriging o errores. La formulación original de Kriging, ahora conocida como Kriging ordinario, es el método más robusto y es el que se utiliza con más frecuencia (Oliver, 2010).

KRIGING ORDINARIO

Kriging ordinario se basa en el supuesto de que se desconoce la media.

Considere que la variable aleatoria, Z , ha sido medida en los puntos de muestreo, x_i , $i=1,2,\dots,N$. Utilizando esta información para estimar su valor en un punto x_0 , por Kriging puntual, con el mismo apoyo de los datos se tiene:

$$\hat{Z}(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i z(x_i) \quad (11)$$

En donde n usualmente representa los puntos de dato dentro de la vecindad local, V , y es mucho menor que el número total en la muestra, N ; λ_i son los pesos. Para asegurar que la predicción sea insesgada la suma de los pesos debe ser igual a uno.

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (12)$$

El error esperado es:

$$E[\{\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)\}] = 0 \quad (13)$$

La varianza de predicción es:

$$var[\hat{Z}(x_0)] = E[\{\hat{Z}(x_0) - Z(x_0)\}^2] = 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_i, x_0) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \lambda_i \lambda_j \gamma(x_i, x_j) \quad (14)$$

En donde $\gamma(x_i, x_j)$ es la semivarianza de Z entre los puntos x_i y x_j , $\gamma(x_i, x_0)$, es la semivarianza entre el i -ésimo punto de muestreo y el punto objetivo x_0 . Las semivarianzas se derivan del modelo ajustado de variograma porque las semivarianzas experimentales son discretas y a distancias limitadas.

La ecuación (14) para un punto conduce a un conjunto de $n+1$ ecuaciones no lineales con $n+1$ incógnitas:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_i, x_j) + \psi(x_0) = \gamma(x_j, x_0) \quad \text{para todo } j,$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (15)$$

En donde el multiplicador de Lagrange, $\psi(x_0)$, se introduce para alcanzar la minimización. Los pesos, λ_i , se insertan en la ecuación (11) para dar la predicción de Z en x_0 . La varianza de predicción de Kriging es luego obtenida como:

$$\sigma^2(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \gamma(x_i, x_0) + \psi(x_0) \quad (16)$$

Kriging puntual es un interpolador exacto, el valor “krigeado” en un sitio de muestreo es el valor observado allí y la varianza de predicción es entonces cero (Oliver, 2010)

DATOS DE ENTRADA

Los datos de entrada para la obtención del modelo geoestadístico son 888 puntos de control geodésico suplementario, proporcionados por el Instituto Geográfico Militar, con mediciones de GPS de precisión y nivelación geométrica; es decir, se dispone de coordenadas planas x , y de cada punto y sus respectivas alturas referidas al elipsoide (h)

y al nivel medio del mar (H). Con estos datos fue factible obtener la ondulación geoidal de cada punto, a partir de la ecuación (1).

OBTENCIÓN Y VALIDACIÓN DE MODELO GEOESTADÍSTICO

Un análisis geoestadístico se divide en tres etapas básicas: Análisis Exploratorio de Datos (EDA), Análisis Estructural y Predicción Espacial.

ANÁLISIS EXPLORATORIO DE DATOS

El Análisis Exploratorio de Datos, busca describir los datos y detectar inconsistencias o errores, a través de índices y gráficos. En la Tabla 1 se muestra, el resumen estadístico de los valores de las muestras de ondulación geoidal.

Tabla 1 Resumen Estadístico Ondulación Geoidal

Media (m)	Desv. Est. (m)	Rango (m)	Coef. de Var.	Asimetría	Mín. (m)	1er Cuartil (m)	Mediana (m)	3er cuartil (m)	Max. (m)	N
27.372	0.222	1.058	0.008	0.418	26.924	27.206	27.333	27.531	27.982	800

El rango de los valores de las muestras es de 1,058 m. Las medidas de localización como la media y la mediana, toman valores cercanos. El coeficiente de variación es igual al 0.8% que verifica que no existen problemas de variabilidad en los datos. El coeficiente de asimetría positivo es un indicativo de que la distribución esta levemente cargada (alargada) hacia los valores superiores a la media.

El Histograma (Fig. 5) y el diagrama de caja (Fig. 6), confirman que la distribución está cargada, levemente, hacia los valores superiores de la media. Además, el diagrama de caja, no muestra observaciones atípicas u observaciones atípicas extremas.

Otro tipo de gráfico que resulta ser muy útil para la detección de relaciones entre las variables, así como para identificación de tendencias en el valor promedio de la variable en la región, son los gráficos de dispersión. Uno de los principales supuestos en el análisis geoestadístico es que el fenómeno es estacionario, por lo que, entre algunos aspectos, el nivel promedio de la variable debe ser constante en todos los puntos del área de estudio, y con esto un gráfico de dispersión permite identificar, de forma rápida, si existe alguna tendencia que demuestre que no se cumple el mencionado supuesto. En el análisis de los gráficos de dispersión (Fig. 7 y Fig. 8), se verifica un comportamiento que se lo puede considerar estacionario, es decir que la media es constante para toda la región.

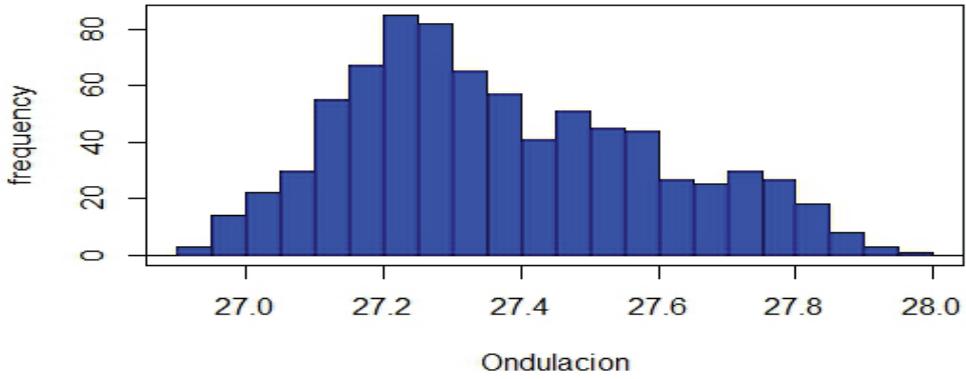


Figura 5 Histograma Ondulación Geoidal (m.)

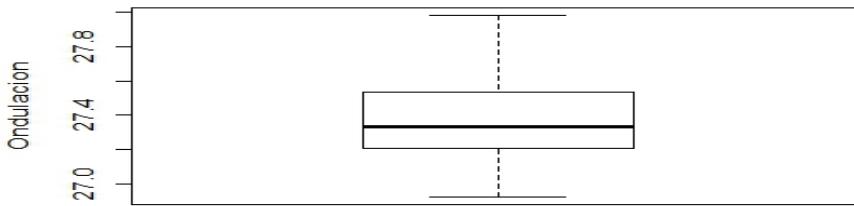


Figura 6 Diagrama de Caja – Ondulación Geoidal (m.)

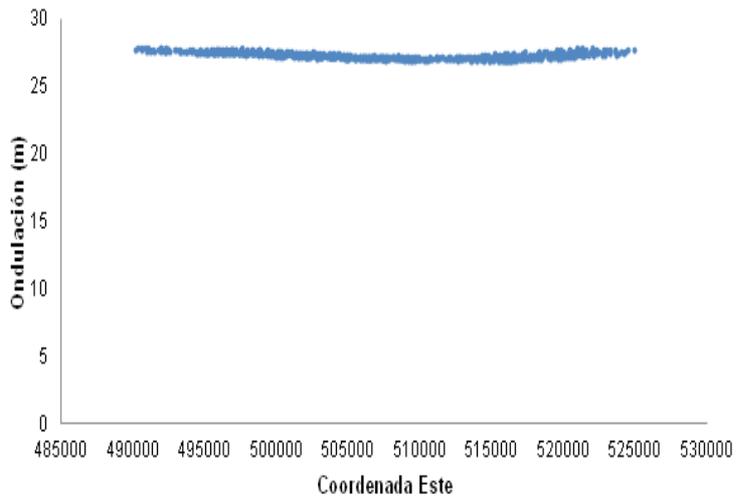


Figura 7 Gráfico de Dispersión Este - Ondulación Geoidal (m.)

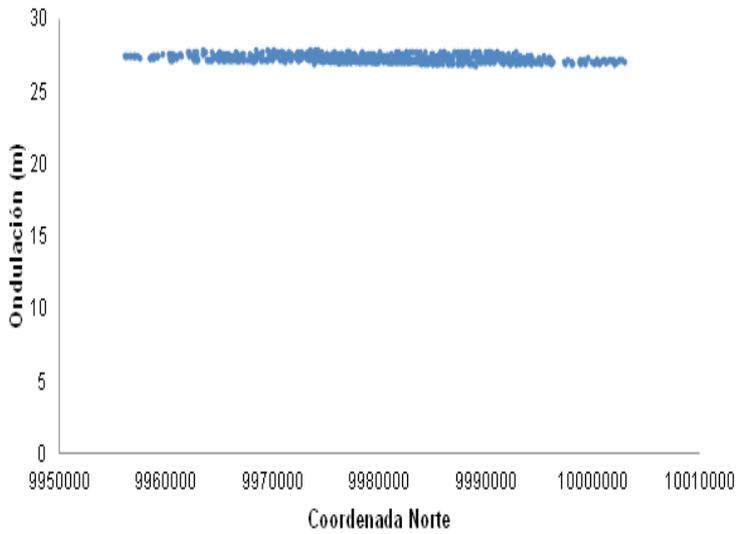


Figura 8 Gráfico de Dispersión Norte - Ondulación Geoidal

ANÁLISIS ESTRUCTURAL

En el análisis estructural de los datos, se calcula el semivariograma experimental y se ajusta el mismo a un modelo teórico. En esta etapa, para los cálculos necesarios, se utiliza el entorno R y el paquete RGeostats. La Figura 9 muestra el variograma experimental omnidireccional bajo supuesto de isotropía para la ondulación geoidal del área de Quito.

La Figura 10 indica gráficamente el ajuste de un modelo teórico al variograma experimental. Este modelo teórico resulta ser un modelo anidado entre una estructura gaussiana y una esférica. Los parámetros de estas estructuras se presentan en la Tabla 2.

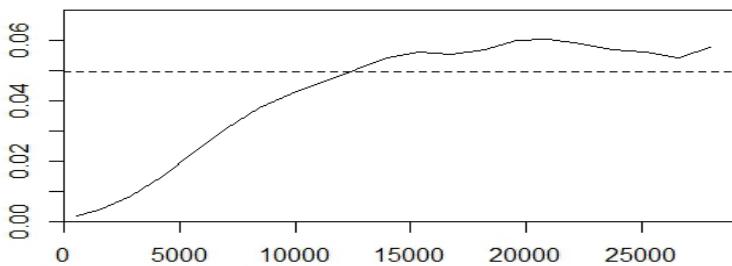


Figura 9 Variograma Experimental Omnidireccional - Quito

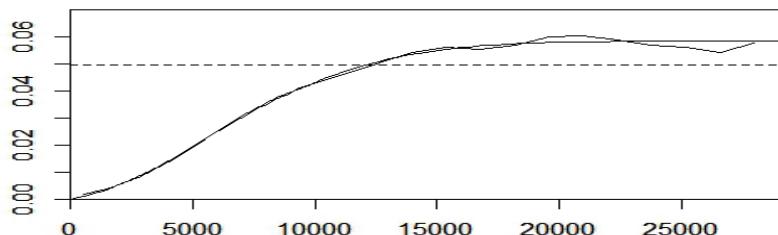


Figura 10 Modelamiento de Variograma Experimental – Quito

Tabla 2 Parámetros de Estructuras Básicas

Estructuras Básicas	Parámetros	
	Alcance-Range (a) (m)	Meseta - sill (C) (m ²)
Gaussiano	15938	0.00494
Esférico	8920	0.00889

PREDICCIÓN ESPACIAL

Una vez que se dispone del modelo teórico del variograma, se procede a la predicción espacial de la variable de estudio a través de Kriging ordinario puntual. De igual manera se trabaja en el paquete RGeostats. Las predicciones de la variable ondulación geoidal y las respectivas varianzas del error de predicción, se realiza sobre los nodos de una malla regular de puntos con intervalo medio de 100,12 m. en las direcciones Norte y Este, con el objetivo de generar los mapas de predicción y del error de predicción (desviación estándar del error de predicción) (Fig. 11 y Fig. 12, respectivamente).

VALIDACIÓN DEL MODELO DE QUITO

La validación del modelo se lo realiza con muestras extraídas de la base de datos original, al inicio de este estudio, que obviamente no fueron utilizadas en la generación del modelo geoestadístico. El total de muestras que se consideran en esta validación es de 88. Los resultados de la validación se muestran en la Tabla 3 y el histograma del error del modelo en la Fig. 13.

Tabla 3 Resumen estadístico Error Modelo - Quito

Media (m.)	Desv. Est. (m.)	Rango (m.)	Coef. Asim.	Min. (m.)	1er Cuartil (m.)	Mediana (m.)	3er cuartil (m.)	Max. (m.)	N
-0.001	0.034	0.221	0.481	-0.095	0.015	0.002	0.015	0.126	88

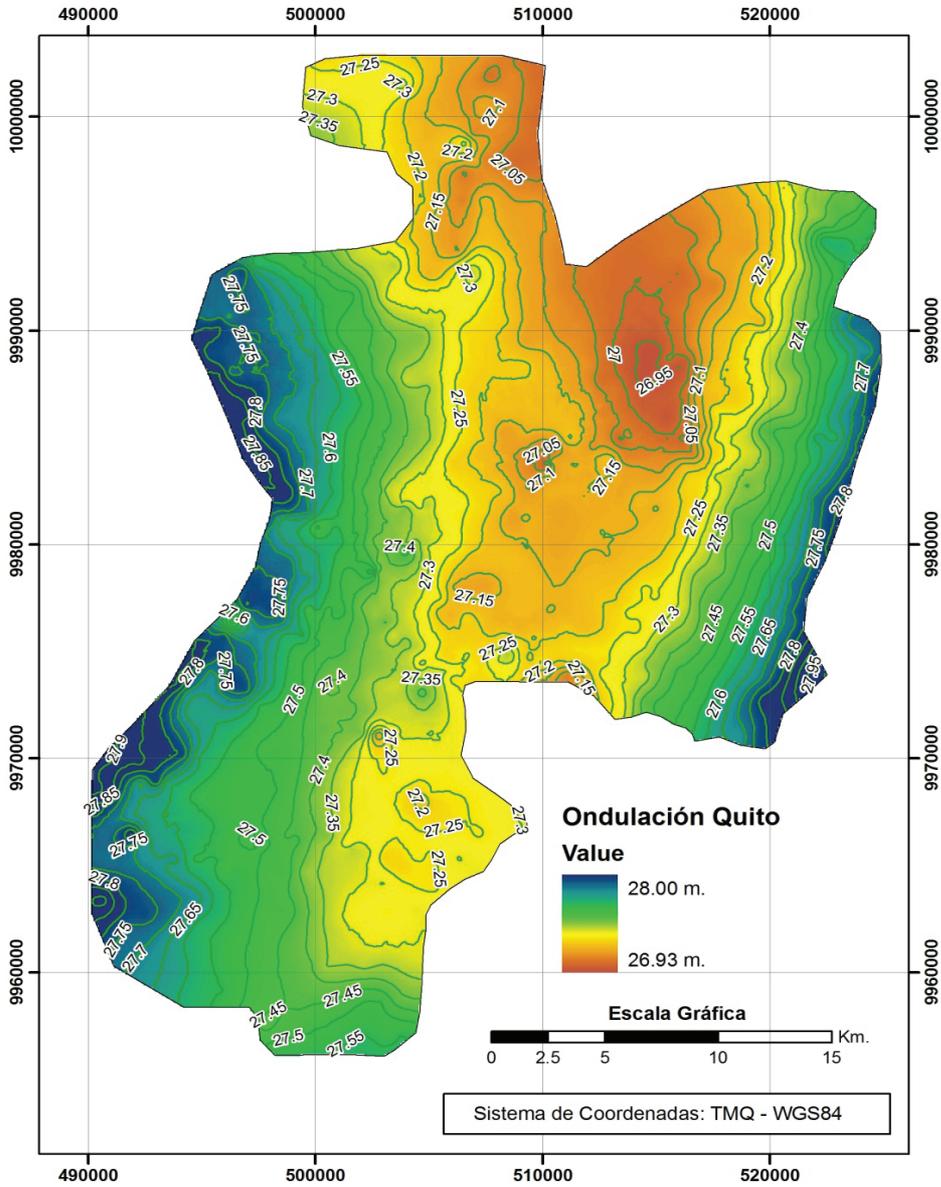


Figura 11 Mapa del Modelo de Predicción de Ondulación Geoidal

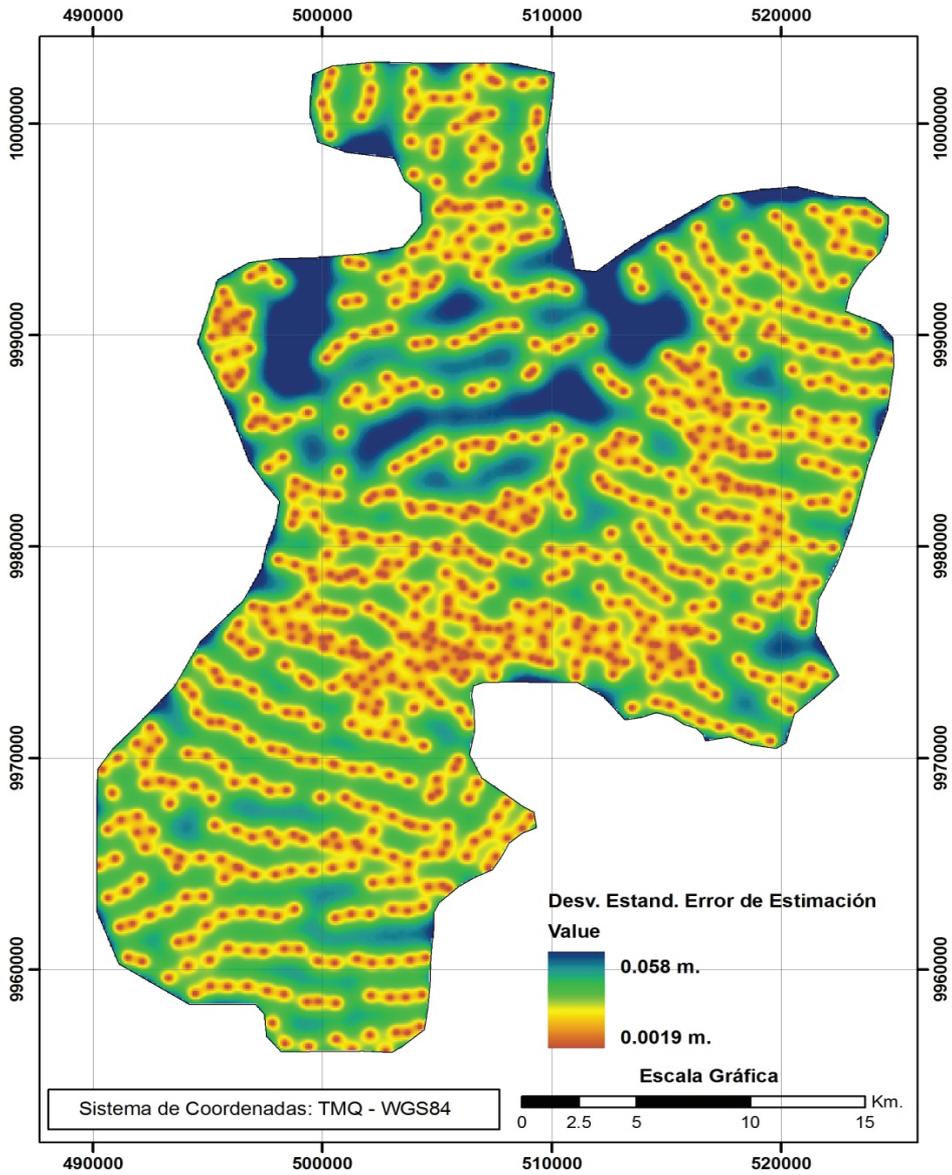


Figura 12 Mapa de Desviación Estándar de Error de Predicción

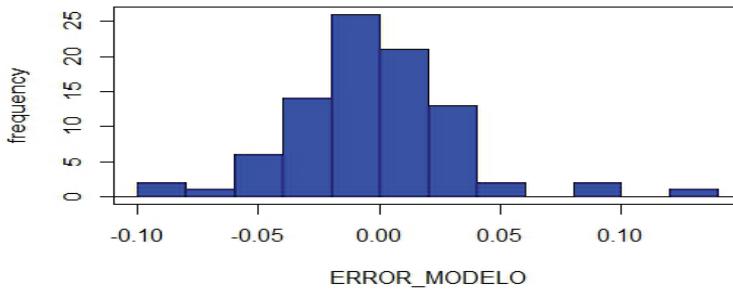


Figura 13 Histograma Error – Modelo

Este procedimiento de validación del modelo muestra que la mayor parte del error de las predicciones se encuentra en el intervalo [-0,05 m.; 0,05 m.].

ANÁLISIS DE RESULTADOS

COMPARACIÓN DE MODELO GEOESTADÍSTICO CON MODELOS GLOBALES EGM96, EGM08 Y MODELO NEURONAL LOCAL, EN PUNTOS DE VALIDACIÓN

Según Olivier (2010), se puede determinar el Error Medio (ME) y el Error Cuadrático Medio (MSE) de cada modelo, a partir de (17) y (18), respectivamente.

$$ME = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \{z(x_i) - \hat{z}(x_i)\} \tag{17}$$

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \{[z(x_i) - \hat{z}(x_i)]^2\} \tag{18}$$

En donde, N es el número de datos, $z(x_i)$ es el valor verdadero (observado) en x_i y $\hat{z}(x_i)$ es el valor estimado por el modelo.

En la Tabla 4, se muestran un resumen de los resultados obtenidos, en la comparación entre modelos.

Tabla 4 Comparación Modelos

Modelo	Desv. Estándar (m.)	ME (m)	MSE (m ²)	Error Máximo	Error Mínimo
Geoestadístico	0,034	-0,001	0,001	0,126	-0,095
EGM96	0,360	1,661	2,886	2,511	1,144
EGM08	0,177	0,624	0,42	1,054	0,250
Local Neuronal	0,264	0,135	0,087	0,628	-0,061

INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

Según el mapa de predicción obtenido (Fig. 11), la ondulación geoidal, varía en la zona urbana de Quito entre 26,93 m. y 28,00 m.

Como se mencionó, anteriormente, adicional a las predicciones se obtuvo, también, sus respectivos errores de predicción (desviación estándar del error de predicción), encontrándose un máximo de 5,8 cm., lo que da una idea del nivel de incertidumbre del modelo geoestadístico obtenido.

Según Alfaro (2007) y Giraldo (2007), considerando que los errores de predicción siguen una distribución normal estándar y que son independientes, se puede afirmar que al 95% de confianza los errores máximos de predicción serán de 11,6 cm. Si se compara estos valores con los errores máximos encontrados en la validación del modelo geoestadístico (Tabla 3), se nota, una consistencia en los resultados obtenidos.

En la comparación del modelo geoestadístico, con los modelos globales EGM96, EGM08 y el modelo neuronal local (Tabla 4), en base al error medio y al error cuadrático medio, se evidencia que el modelo geoestadístico se ajusta mejor a la zona de estudio.

CONCLUSIONES

Se obtuvo un modelo de predicción de la variable ondulación geoidal, para la zona urbana de Quito, utilizando técnicas geoestadísticas con el uso del paquete RGeostats dentro del entorno R. Los errores de predicción y la validación del modelo con puntos externos, muestran que el mismo tiene un buen nivel de precisión para su uso práctico en el área de estudio. De manera general, y en base a los errores de predicción, se puede afirmar que la precisión del modelo es menor a 12 cm., con un nivel de confianza del 95%.

Las predicciones de la variable ondulación geoidal y las respectivas varianzas del error de predicción, se realiza sobre los nodos de una malla regular de puntos con intervalo medio de 100,12 m. en las direcciones Norte y Este, con el objetivo de generar los mapas de predicción y del error de predicción. Los productos resultantes son archivos raster (modelos digitales) de esta variable, para la zona de estudio. Esta información puede ser utilizada en Sistemas de Información Geográfica.

Se realizó la comparación del modelo geoestadístico obtenido en este estudio, con los modelos globales EGM96, EGM08 y el modelo neuronal local, en los puntos de validación (88), utilizando el error medio y el error cuadrático medio de cada modelo. Los resultados muestran que el modelo geoestadístico representa de mejor manera la ondulación geoidal en la zona urbana de Quito.

AGRADECIMIENTOS

Un agradecimiento especial al Instituto Geográfico Militar del Ecuador, institución que proporcionó los datos geodésicos utilizados en este estudio.

REFERENCIAS

- Alfaro, M. A. (2007). Estimación de Recursos Mineros. http://cg.ensmp.fr/bibliotheque/cgi-bin/public/bibli_index.cgi. Ingresado: Mayo de 2014
- Blitzkow, D., Drewes, H., Sánchez L., & Freiras, S. (SF). Sistema Vertical de Referencia para América del Sur. Recuperado de: <http://azimuth.univalle.edu.co/docsdownload/archivo3.doc>. Ingresado: Mayo de 2014
- Drewes, H. & Sánchez, L. (2002). Curso de Sistemas de Referencia en Geodesia. Quito. Instituto Geográfico Militar.
- Giraldo, R. (2007). Introducción a la Geoestadística. Teoría y Aplicaciones. ftp://ftp.ciat.cgiar.org/DAPA/projects/Cursos_Talleres/Curso_R/DOCUMENTOS/LIBRO%20DE%20GEOESTADISTICA.pdf. Ingresado: Mayo de 2014
- Heiskanen W. A. & Moritz H. (1985). Geodesia Física. Instituto Geográfico Nacional. Madrid.
- Mena J. B. (2008). Geodesia Superior, Volumen 1. Centro Nacional de Información Geográfica. Madrid.
- Mena J. B. (2008). Geodesia Superior, Volumen 2. Centro Nacional de Información Geográfica. Madrid.
- Oliver, M. A. (2010). Geostatistics Applications for Precision Agriculture. Springer Science+Business Media BV. New York.
- Renard D. & Ors F. (2014). RGeostats Manual. <http://rgeostats.free.fr/doc/Manual/Manual.pdf>. Ingresado: Mayo de 2014
- Tierra A. & Acurio V. (2016). Modelo neuronal para la predicción de la altura geoidal local en el Ecuador. Revista Geoespacial. Número 13, 59-71