

# **PERFECT EMBEREMENT ACTIONS IN VIGAS WITH LINEAL CARDS AND NEW CEINCI-LAB FUNCTIONS**

**Roberto Aguiar <sup>(1,2)</sup>, Alejandro Bonilla <sup>(3)</sup>**

<sup>(1)</sup>Profesor. Departamento de Ciencias de la Tierra y la Construcción. Universidad de Fuerzas Armadas ESPE. Av. Gral. Rumiñahui s/n, Valle de los Chillos. [raguiar@espe.edu.ec](mailto:raguiar@espe.edu.ec)

<sup>(2)</sup>Carrera de Ingeniería Civil. Facultad de Ingeniería. Universidad Laica Eloy Alfaro de Manabí.

<sup>(3)</sup>Carrera de Ingeniería Civil. Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE. boalejan25@gmail.com

Received: February 2020. Accepted: March 2020

Published: July 1, 2020

## **ABSTRACT**

The functions are determined in a way that leads to the calculation of the actions of perfect recessing of reinforced concrete beams, with straight haunches, any kind of load and new features are presented for the **CEINCI-LAB** computer system with which is the moment and forces of perfect recessing in beams with straight haunches.

Finally, two applications are made, one for static analysis of a flat gantry and one for spatial analysis of a structure with straight haunches. The two cases illustrate the use of **CEINCI-LAB** functions

**Keywords:** Reinforced Concrete Straight Haunches. **CEINCI-LAB** computer system

## **ACCIONES DE EMPOTRAMIENTO PERFECTO EN VIGAS CON CARTELAS LINEALES Y NUEVAS FUNCIONES DE CEINCI-LAB**

### **RESUMEN**

Se determinan las funciones de forma que conducen al cálculo de las acciones de empotramiento perfecto de vigas de hormigón armado, con cartelas lineales, ante cualquier tipo de carga y se presentan nuevas funciones para el sistema de computación **CEINCI-LAB** con las cuales se halla el momento y fuerzas de empotramiento perfecto en vigas con cartelas.

Finalmente se realizan dos aplicaciones una para el análisis estático de un pórtico plano y otra para el análisis espacial de estructuras con cartelas. En los dos casos se ilustra el uso de las funciones de **CEINCI-LAB**

**Palabras Claves:** Cartelas Lineales de Hormigón Armado. Sistema de computación **CEINCI-LAB**

## 1. INTRODUCCIÓN

El Edificio Administrativo de la Universidad de Fuerzas Armadas ESPE, es irregular en planta y elevación, con grandes luces, por lo que fue diseñado con vigas con cartelas lineales como la que se aprecia en la figura 1 a. Se aprecia que tiene vigas principales con cartela (que van de columna a columna) y vigas secundarias de sección constante (en el centro de luz). Caiza (2005)



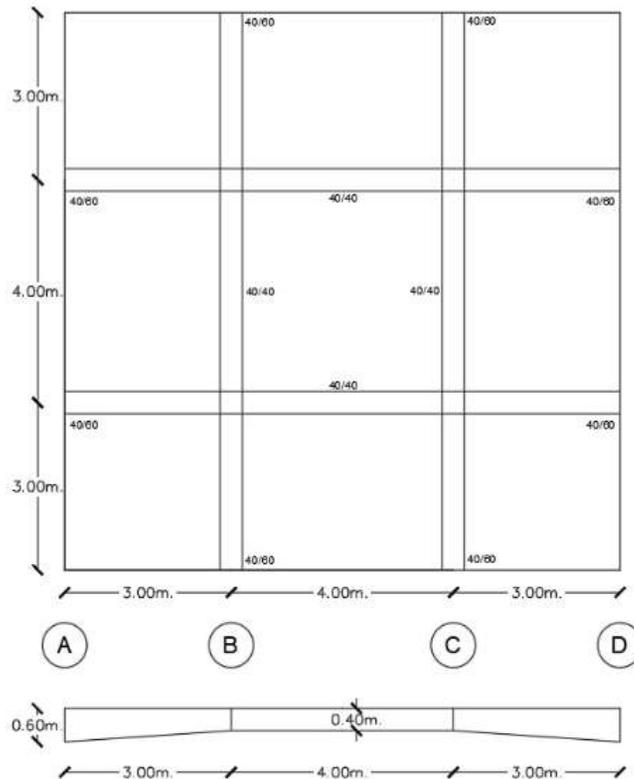
(a)



(b)

**Figura 1** Estructuras de hormigón armado con cartelas; a) Edificio Administrativo de Universidad de Fuerzas Armadas ESPE; b) Bodega de Firmesa S.A., en Carcelén.

La bodega de la empresa Firmesa S.A., ubicada en Carcelén en Quito, tiene que cubrir grandes luces de 10 m., en los dos sentidos ortogonales. El dueño del Proyecto solo permitía tener columnas de hormigón armado en los pórticos perimetrales. La figura 1 b, muestra un pórtico exterior perimetral con luces de 3 m, y 4 m, falta otra luz de 3 m, que no aparece en la fotografía; también se observan dos pórticos interiores con vigas con cartelas lineales. Aguiar (2008).

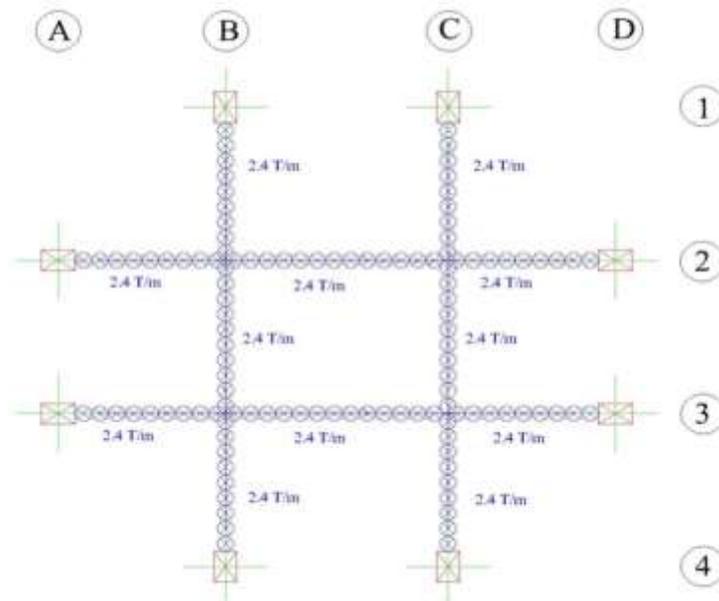


**Figura 2** Vista en planta de la bodega de la empresa Firmesa S.A., ubicada en Carcelén; b) Geometría de la viga con cartelas.

De tal manera que los pórticos exteriores si tienen columnas de hormigón armado pero los pórticos interiores no tienen columnas, eso permite que puedan ingresar vehículos a la planta baja con facilidad para dejar o llevar productos; en el segundo piso la idea inicial fue también tener una sola gran área.

Para cubrir la luz de 10 m, en cada dirección se decidió tener vigas rectangulares de 40/40 cm, en la parte central de 4 m, y vigas con cartelas en los extremos de 3 m, de longitud; la dimensión de las vigas en los extremos es de 40/60 cm, ver figura 2.

Para el análisis ante cargas verticales, de las vigas de hormigón armado con cartelas, se modeló como una malla espacial, la misma que se indica en la figura 3, en la intersección de las vigas no existe columnas.



**Figura 3** Modelo numérico para analizar las vigas con cartelas de un Piso.

En el Proyecto Estructural se calculó con las luces indicadas en la figura 2 pero en la construcción se incrementó ligeramente las dimensiones con unos voladizos. Esto es normal, de que en la construcción se modifique ligeramente el proyecto de ahí la necesidad del control y asesoramiento que debe dar el Proyectista Estructural en forma periódica.

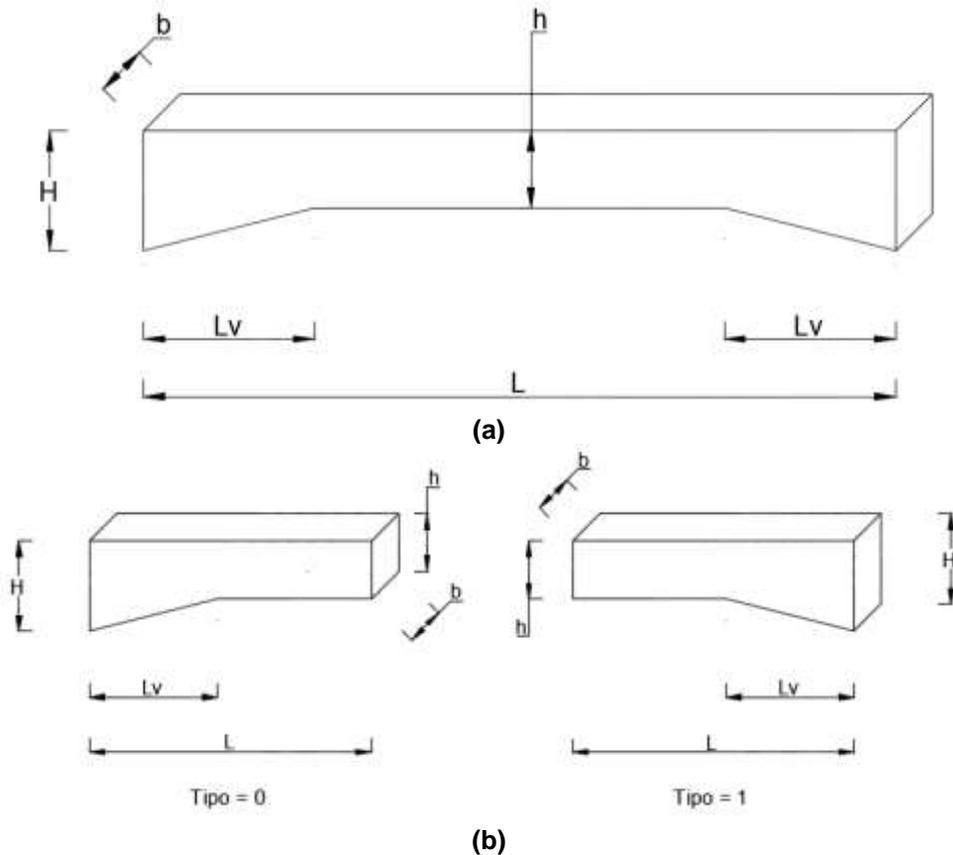
Lo cierto es que una buena alternativa estructural para cubrir grandes luces es que las vigas tengan cartelas. Ahora se debe decidir con que modelo de análisis se desea trabajar y por el momento se tiene dos casos desarrollados: i) Considerar a la viga con cartelas sin nudo intermedio como el que se muestra en la figura 4 a; ii) Considerar un nudo intermedio en la viga, de tal manera que se tienen dos elementos, el uno con cartela a la izquierda y el otro con cartela a la derecha, lo que se indica en la figura 4 b.

En los dos modelos  $b$  el ancho constante de la viga;  $h$  la altura en el centro de luz;  $H$  la altura en el extremo de la viga;  $L_v$  la longitud de la cartela;  $L$  la longitud total de la viga, para el modelo de la figura 4 a;  $L$  es la mitad de la longitud de la viga para el modelo de la figura 4 b.

En Aguiar y Bonilla (2020), se presentó la deducción de las ecuaciones que conducen al cálculo de la matriz de rigidez del elemento para los tres casos indicados en la figura 4, que son: i) Viga con dos cartelas; ii) Viga con cartela a la izquierda; iii) Viga con cartela a la derecha.

Se presentaron tablas para quien quiera calcular manualmente los elementos de la matriz de rigidez en sistema de coordenadas 1 (sin considerar desplazamientos como cuerpo rígido) y después encontrar la matriz de rigidez en coordenadas locales y globales (Aguiar 2020). Se indicó también las nuevas

funciones del sistema de computación **CEINCI-LAB** que facilitan el cálculo de la matriz de rigidez de una estructura. Bonilla (2019).



**Figura 4** Modelos de análisis de una viga de hormigón armado con cartelas; a) Sin considerar nudo en la mitad de la viga; b) Considerando nudo en la mitad de la viga, con lo que se tienen 2 elementos.

Ahora, en este artículo, primero se presenta el marco teórico que conduce al cálculo de las funciones de forma para encontrar las acciones de empotramiento perfecto para cualquier tipo de carga, para los dos modelos indicados en la figura 4 b, que son: i) Viga con cartela a la izquierda; y, ii) Viga con cartela a la derecha.

Después se presentan tablas para hallar los coeficientes que llevan al cálculo de las acciones de empotramiento perfecto, ante carga uniforme distribuida para el modelo de la figura 4 b.

Finalmente se indican las nuevas funciones de **CEINCI-LAB** con las cuales se puede realizar el análisis estático de un pórtico de hormigón armado con cartelas.

## 2. FUNCIONES DE FORMA

De manera que se presente compatibilidad con **CEINCI-LAB**, el presente trabajo utiliza el modelo de la Figura 4 (b). Se adopta la nomenclatura mencionada en la misma y se considera los siguientes datos:

$$\alpha = \frac{h}{H} \quad \beta = \frac{Lv}{L}$$

Se puede encontrar la deducción de ecuaciones de inercia en Aguiar (2020), Bonilla (2019), de modo que se tiene.

- **Para:  $0 \leq x < \beta L$**

$$I(x) = Ia * \left(1 - \frac{1 - \alpha}{\beta * L} * x\right)^3$$

- **Para:  $\beta L \leq x < L$**

$$I(x) = \alpha^3 * Ia$$

Partiendo de una carga  $P_0=0$  se deduce una ecuación general de momentos integrando la carga.

$$\frac{dM^2}{dx^2} = P_0 = 0$$

$$\frac{dM}{dx} = A$$

$$M(x) = A * x + B$$

Utilizando la ecuación de resistencia de materiales se tiene:

$$\frac{dv^2}{dx^2} = \frac{M(x)}{E * I(x)}$$

- **Para:  $0 \leq x < \beta L$**

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{A * x + B}{E * Ia * \left(1 - \frac{1 - \alpha}{\beta * L} * x\right)^3} \quad (1)$$

- **Para:**  $\beta L \leq x < L$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{A * x + B}{E * \alpha^3 * I\alpha} \quad (2)$$

Para hallar las funciones de forma, es necesario resolver las ecuaciones 1 y 2 por integrales sucesivas, de lo que se tiene:

- **Para:**  $0 \leq x < \beta L$

$$\theta(x) = C - \frac{AL^4\beta^4 + (BL^3\alpha - BL^3)\beta^3 + x(2AL^3\alpha - 2AL^3)\beta^3}{E I \alpha ((2L^2\alpha^2 - 4L^2\alpha + 2L^2)\beta^2 + x(4L\alpha^3 - 12L\alpha^2 + 12L\alpha - 4L)\beta + x^2(2\alpha^4 - 8\alpha^3 + 12\alpha^2 - 8\alpha + 2))} \quad (3)$$

$$v(x) = -\frac{AL^3\beta^3 \ln(L\beta + x(\alpha - 1))}{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1} + \frac{AL^4\beta^4 + (BL^3 - BL^3\alpha)\beta^3}{(2L\alpha^3 - 6L\alpha^2 + 6L\alpha - 2L)\beta + x(2\alpha^4 - 8\alpha^3 + 12\alpha^2 - 8\alpha + 2)} + Cx + D \quad (4)$$

- **Para:**  $\beta L \leq x < L$

$$\theta(x) = \frac{\frac{Ax^2}{2} + Bx}{E I \alpha \alpha^3} + E1 \quad (5)$$

$$v(x) = \frac{\frac{Ax^3}{6} + \frac{Bx^2}{2}}{E I \alpha \alpha^3} + E1x + F \quad (6)$$

Partiendo de estas ecuaciones, se debe utilizar varias condiciones de frontera, dependiendo de la reacción que se desee encontrar.

De manera que para encontrar el cortante en el nudo inicial, es necesario realizar un desplazamiento  $v1$  mientras el resto de las deformaciones son 0.

$$x = 0 \quad \theta = 0$$

$$x = 0 \quad v = v1$$

$$x = L \quad \theta = 0$$

$$x = L \quad v = 0$$

Reemplazando las condiciones se obtienen las 4 primeras ecuaciones para el cálculo de las constantes de integración.

$$C - \frac{AL^4\beta^4 + (BL^3\alpha - BL^3)\beta^3}{Ela(2L^2\alpha^2 - 4L^2\alpha + 2L^2)\beta^2} = 0 \quad (7)$$

$$D - \frac{\frac{AL^3\beta^3 \ln(L\beta)}{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1} + \frac{AL^4\beta^4 + (BL^3 - BL^3\alpha)\beta^3}{(2L\alpha^3 - 6L\alpha^2 + 6L\alpha - 2L)\beta}}{Ela} = v1 \quad (8)$$

$$\frac{\frac{AL^2}{2} + BL}{Ela\alpha^3} + E1 = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\frac{AL^3}{6} + \frac{BL^2}{2}}{Ela\alpha^3} + E1L + F = 0 \quad (10)$$

Con el fin de completar el sistema de ecuaciones, se utilizan las condiciones que enlazan ambos tramos de la viga, estas son válidas para encontrar todas las acciones de empotramiento perfecto.

$$x = \beta * L \quad \theta 1 = \theta 2$$

$$x = \beta * L \quad v1 = v2$$

Reemplazando estas se tiene:

$$C - \frac{L(2AL^3\alpha - 2AL^3)\beta^4 + AL^4\beta^4 + (BL^3\alpha - BL^3)\beta^3}{Ela(L^2(2\alpha^4 - 8\alpha^3 + 12\alpha^2 - 8\alpha + 2)\beta^2 + L(4L\alpha^3 - 12L\alpha^2 + 12L\alpha - 4L)\beta^2 + (2L^2\alpha^2 - 4L^2\alpha + 2L^2)\beta^2)} = \frac{\frac{AL^2\beta^2}{2} + BL\beta}{Ela\alpha^3} + E1 \quad (11)$$

$$\frac{\frac{AL^3\beta^3 \ln(L(\alpha - 1)\beta + L\beta)}{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1} + \frac{AL^4\beta^4 + (BL^3 - BL^3\alpha)\beta^3}{L(2\alpha^4 - 8\alpha^3 + 12\alpha^2 - 8\alpha + 2)\beta + (2L\alpha^3 - 6L\alpha^2 + 6L\alpha - 2L)\beta}}{Ela} + CL\beta + D = \frac{\frac{AL^3\beta^3}{6} + \frac{BL^2\beta^2}{2}}{Ela\alpha^3} + E1L\beta + F \quad (12)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene las constantes de integración para cortante en el nudo inicial.

$$A = (6 * E * I_a * v_1 * (\alpha - 1)^3 * \alpha^3 * (\alpha^2 * \beta + \alpha * \beta - 2 * \beta + 2)) / (L^3 * (6 * \alpha^5 * \ln(\alpha) * \beta^4 + 6 * \alpha^4 * \ln(\alpha) * \beta^4 - 12 * \alpha^3 * \ln(\alpha) * \beta^4 - 14 * \alpha^5 * \beta^4 + 22 * \alpha^4 * \beta^4 + \alpha^3 * \beta^4 - 13 * \alpha^2 * \beta^4 + 5 * \alpha * \beta^4 - \beta^4 + 12 * \alpha^3 * \ln(\alpha) * \beta^3 - 22 * \alpha^3 * \beta^3 + 36 * \alpha^2 * \beta^3 - 18 * \alpha * \beta^3 + 4 * \beta^3 - 6 * \alpha^4 * \beta^2 + 24 * \alpha^3 * \beta^2 - 36 * \alpha^2 * \beta^2 + 24 * \alpha * \beta^2 - 6 * \beta^2 + 2 * \alpha^5 * \beta - 4 * \alpha^4 * \beta - 4 * \alpha^3 * \beta + 16 * \alpha^2 * \beta - 14 * \alpha * \beta + 4 * \beta + \alpha^3 - 3 * \alpha^2 + 3 * \alpha - 1))$$

$$B = (-6 * E * I_a * v_1 * (\alpha - 1)^3 * \alpha^3 * (\alpha * \beta^2 - \beta^2 + 1)) / (L^2 * (6 * \alpha^5 * \ln(\alpha) * \beta^4 + 6 * \alpha^4 * \ln(\alpha) * \beta^4 - 12 * \alpha^3 * \ln(\alpha) * \beta^4 - 14 * \alpha^5 * \beta^4 + 22 * \alpha^4 * \beta^4 + \alpha^3 * \beta^4 - 13 * \alpha^2 * \beta^4 + 5 * \alpha * \beta^4 - \beta^4 + 12 * \alpha^3 * \ln(\alpha) * \beta^3 - 22 * \alpha^3 * \beta^3 + 36 * \alpha^2 * \beta^3 - 18 * \alpha * \beta^3 + 4 * \beta^3 - 6 * \alpha^4 * \beta^2 + 24 * \alpha^3 * \beta^2 - 36 * \alpha^2 * \beta^2 + 24 * \alpha * \beta^2 - 6 * \beta^2 + 2 * \alpha^5 * \beta - 4 * \alpha^4 * \beta - 4 * \alpha^3 * \beta + 16 * \alpha^2 * \beta - 14 * \alpha * \beta + 4 * \beta + \alpha^3 - 3 * \alpha^2 + 3 * \alpha - 1))$$

$$C = (3 * v_1 * (\alpha - 1) * \alpha^3 * \beta * (3 * \alpha * \beta^2 - 3 * \beta^2 + 2 * \beta - \alpha + 1)) / (L * (6 * \alpha^5 * \ln(\alpha) * \beta^4 + 6 * \alpha^4 * \ln(\alpha) * \beta^4 - 12 * \alpha^3 * \ln(\alpha) * \beta^4 - 14 * \alpha^5 * \beta^4 + 22 * \alpha^4 * \beta^4 + \alpha^3 * \beta^4 - 13 * \alpha^2 * \beta^4 + 5 * \alpha * \beta^4 - \beta^4 + 12 * \alpha^3 * \ln(\alpha) * \beta^3 - 22 * \alpha^3 * \beta^3 + 36 * \alpha^2 * \beta^3 - 18 * \alpha * \beta^3 + 4 * \beta^3 - 6 * \alpha^4 * \beta^2 + 24 * \alpha^3 * \beta^2 - 36 * \alpha^2 * \beta^2 + 24 * \alpha * \beta^2 - 6 * \beta^2 + 2 * \alpha^5 * \beta - 4 * \alpha^4 * \beta - 4 * \alpha^3 * \beta + 16 * \alpha^2 * \beta - 14 * \alpha * \beta + 4 * \beta + \alpha^3 - 3 * \alpha^2 + 3 * \alpha - 1))$$

$$D = -(v_1 * (\alpha^3 * \beta^4 * \ln(L^12 * \alpha^12 * \beta^12) - \alpha^3 * \beta^3 * \ln(L^12 * \alpha^12 * \beta^12) - \alpha^5 * \beta^4 * \ln(L^6 * \alpha^6 * \beta^6) - \alpha^4 * \beta^4 * \ln(L^6 * \alpha^6 * \beta^6) + 8 * \alpha^5 * \beta^4 - 19 * \alpha^4 * \beta^4 + 2 * \alpha^3 * \beta^4 + 13 * \alpha^2 * \beta^4 - 5 * \alpha * \beta^4 + \beta^4 + 16 * \alpha^3 * \beta^3 - 36 * \alpha^2 * \beta^3 + 18 * \alpha * \beta^3 - 4 * \beta^3 + 3 * \alpha^4 * \beta^2 - 21 * \alpha^3 * \beta^2 + 36 * \alpha^2 * \beta^2 - 24 * \alpha * \beta^2 + 6 * \beta^2 - 2 * \alpha^5 * \beta + 4 * \alpha^4 * \beta + 4 * \alpha^3 * \beta - 16 * \alpha^2 * \beta + 14 * \alpha * \beta - 4 * \beta - \alpha^3 + 3 * \alpha^2 - 3 * \alpha + 1)) / (6 * \alpha^5 * \ln(\alpha) * \beta^4 + 6 * \alpha^4 * \ln(\alpha) * \beta^4 - 12 * \alpha^3 * \ln(\alpha) * \beta^4 - 14 * \alpha^5 * \beta^4 + 22 * \alpha^4 * \beta^4 + \alpha^3 * \beta^4 - 13 * \alpha^2 * \beta^4 + 5 * \alpha * \beta^4 - \beta^4 + 12 * \alpha^3 * \ln(\alpha) * \beta^3 - 22 * \alpha^3 * \beta^3 + 36 * \alpha^2 * \beta^3 - 18 * \alpha * \beta^3 + 4 * \beta^3 - 6 * \alpha^4 * \beta^2 + 24 * \alpha^3 * \beta^2 - 36 * \alpha^2 * \beta^2 + 24 * \alpha * \beta^2 - 6 * \beta^2 + 2 * \alpha^5 * \beta - 4 * \alpha^4 * \beta - 4 * \alpha^3 * \beta + 16 * \alpha^2 * \beta - 14 * \alpha * \beta + 4 * \beta + \alpha^3 - 3 * \alpha^2 + 3 * \alpha - 1)$$

$$E_1 = (3 * v_1 * (\alpha - 1)^4 * \beta * (2 * \beta - \alpha - 2)) / (L * (6 * \alpha^5 * \ln(\alpha) * \beta^4 + 6 * \alpha^4 * \ln(\alpha) * \beta^4 - 12 * \alpha^3 * \ln(\alpha) * \beta^4 - 14 * \alpha^5 * \beta^4 + 22 * \alpha^4 * \beta^4 + \alpha^3 * \beta^4 - 13 * \alpha^2 * \beta^4 + 5 * \alpha * \beta^4 - \beta^4 + 12 * \alpha^3 * \ln(\alpha) * \beta^3 - 22 * \alpha^3 * \beta^3 + 36 * \alpha^2 * \beta^3 - 18 * \alpha * \beta^3 + 4 * \beta^3 - 6 * \alpha^4 * \beta^2 + 24 * \alpha^3 * \beta^2 - 36 * \alpha^2 * \beta^2 + 24 * \alpha * \beta^2 - 6 * \beta^2 + 2 * \alpha^5 * \beta - 4 * \alpha^4 * \beta - 4 * \alpha^3 * \beta + 16 * \alpha^2 * \beta - 14 * \alpha * \beta + 4 * \beta + \alpha^3 - 3 * \alpha^2 + 3 * \alpha - 1))$$

$$F = ((3 * v_1 * \alpha^4 - 12 * v_1 * \alpha^3 + 18 * v_1 * \alpha^2 - 12 * v_1 * \alpha + 3 * v_1) * \beta^2 + (-2 * v_1 * \alpha^5 + 4 * v_1 * \alpha^4 + 4 * v_1 * \alpha^3 - 16 * v_1 * \alpha^2 + 14 * v_1 * \alpha - 4 * v_1) * \beta - v_1 * \alpha^3 + 3 * v_1 * \alpha^2 - 3 * v_1 * \alpha + v_1) / (\beta^4 * (\alpha^3 * (12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) - 12 * \ln(L * \beta) - 1) + \alpha^5 * (-6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 6 * \ln(L * \beta) + 14) + \alpha^4 * (-6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 6 * \ln(L * \beta) - 22) + 13 * \alpha^2 - 5 * \alpha + 1) + \beta^3 * (\alpha^3 * (-12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 12 * \ln(L * \beta) + 22) - 36 * \alpha^2 + 18 * \alpha - 4) + (6 * \alpha^4 - 24 * \alpha^3 + 36 * \alpha^2 - 24 * \alpha + 6) * \beta^2 + (-2 * \alpha^5 + 4 * \alpha^4 + 4 * \alpha^3 - 16 * \alpha^2 + 14 * \alpha - 4) * \beta - \alpha^3 + 3 * \alpha^2 - 3 * \alpha + 1))$$

De manera que se tiene que:



$$\begin{aligned}
 A = & -(((6 * E * I a^{\alpha^7} - 24 * E * I a^{\alpha^6} + 36 * E * I a^{\alpha^5} - \\
 & 24 * E * I a^{\alpha^4} + 6 * E * I a^{\alpha^3}) * \beta^2 + 6 * E * I a^{\alpha^6} - 18 * E * I a^{\alpha^5} + 18 * E * I a^{\alpha^4} - \\
 & 6 * E * I a^{\alpha^3}) * \theta_1) / (\beta^4 * (L^2 * \alpha^3 * (12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta)) - 12 * \ln(L * \beta)) - 1) + L^2 * \alpha^5 * (- \\
 & 6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 6 * \ln(L * \beta) + 14) + L^2 * \alpha^4 * (-6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 6 * \ln(L * \beta) - \\
 & 22) + 13 * L^2 * \alpha^2 - 5 * L^2 * \alpha + L^2) + \beta^3 * (L^2 * \alpha^3 * (-12 * \ln(L * (\alpha - \\
 & 1) * \beta + L * \beta) + 12 * \ln(L * \beta) + 22) - 36 * L^2 * \alpha^2 + 18 * L^2 * \alpha - 4 * L^2) + (6 * L^2 * \alpha^4 - \\
 & 24 * L^2 * \alpha^3 + 36 * L^2 * \alpha^2 - 24 * L^2 * \alpha + 6 * L^2) * \beta^2 + (- \\
 & 2 * L^2 * \alpha^5 + 4 * L^2 * \alpha^4 + 4 * L^2 * \alpha^3 - 16 * L^2 * \alpha^2 + 14 * L^2 * \alpha - 4 * L^2) * \beta - \\
 & L^2 * \alpha^3 + 3 * L^2 * \alpha^2 - 3 * L^2 * \alpha + L^2) \\
 B = & ((\beta^3 * (E * I a^{\alpha^6} * (-12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta)) + 12 * \ln(L * \beta) + 22) - \\
 & 36 * E * I a^{\alpha^5} + 18 * E * I a^{\alpha^4} - 4 * E * I a^{\alpha^3}) - 4 * E * I a^{\alpha^6} + 12 * E * I a^{\alpha^5} - \\
 & 12 * E * I a^{\alpha^4} + 4 * E * I a^{\alpha^3}) * \theta_1) / (\beta^4 * (L^2 * \alpha^3 * (12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta)) - 12 * \ln(L * \beta)) - \\
 & 1) + L^2 * \alpha^5 * (-6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 6 * \ln(L * \beta) + 14) + L^2 * \alpha^4 * (-6 * \ln(L * (\alpha - \\
 & 1) * \beta + L * \beta) + 6 * \ln(L * \beta) - 22) + 13 * L^2 * \alpha^2 - 5 * L^2 * \alpha + L^2) + \beta^3 * (L^2 * \alpha^3 * (-12 * \ln(L * (\alpha - \\
 & 1) * \beta + L * \beta) + 12 * \ln(L * \beta) + 22) - 36 * L^2 * \alpha^2 + 18 * L^2 * \alpha - 4 * L^2) + (6 * L^2 * \alpha^4 - \\
 & 24 * L^2 * \alpha^3 + 36 * L^2 * \alpha^2 - 24 * L^2 * \alpha + 6 * L^2) * \beta^2 + (-2 * L^2 * \alpha^5 + 4 * L^2 * \alpha^4 + 4 * L^2 * \alpha^3 - \\
 & 16 * L^2 * \alpha^2 + 14 * L^2 * \alpha - 4 * L^2) * \beta - L^2 * \alpha^3 + 3 * L^2 * \alpha^2 - 3 * L^2 * \alpha + L^2) \\
 C = & ((\beta^4 * (\alpha^3 * (12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta)) - 12 * \ln(L * \beta)) - 19) + \alpha^4 * (-18 * \ln(L * (\alpha - \\
 & 1) * \beta + L * \beta) + 18 * \ln(L * \beta)) - 3) + 9 * \alpha^5 + 18 * \alpha^4 - 6 * \alpha^3 + 1) + \beta^3 * (\alpha^4 * (12 * \ln(L * (\alpha - \\
 & 1) * \beta + L * \beta)) - 12 * \ln(L * \beta)) - 22) + \alpha^3 * (-12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 12 * \ln(L * \beta) + 58) - \\
 & 54 * \alpha^2 + 22 * \alpha - 4) + (-3 * \alpha^5 + 24 * \alpha^4 - 57 * \alpha^3 + 60 * \alpha^2 - 30 * \alpha + 6) * \beta^2 + (-6 * \alpha^4 + 22 * \alpha^3 - \\
 & 30 * \alpha^2 + 18 * \alpha - 4) * \beta + \alpha^4 - 4 * \alpha^3 + 6 * \alpha^2 - 4 * \alpha + 1) * \theta_1) / (\beta^4 * (\alpha^4 * (18 * \ln(L * (\alpha - \\
 & 1) * \beta + L * \beta)) - 18 * \ln(L * \beta) + 21) + \alpha^6 * (-6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 6 * \ln(L * \beta) + 14) + \alpha^3 * (- \\
 & 12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 12 * \ln(L * \beta) + 14) - 36 * \alpha^5 - 18 * \alpha^2 + 6 * \alpha - \\
 & 1) + \beta^3 * (\alpha^3 * (12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta)) - 12 * \ln(L * \beta)) - 58) + \alpha^4 * (-12 * \ln(L * (\alpha - \\
 & 1) * \beta + L * \beta) + 12 * \ln(L * \beta) + 22) + 54 * \alpha^2 - 22 * \alpha + 4) + (6 * \alpha^5 - 30 * \alpha^4 + 60 * \alpha^3 - \\
 & 60 * \alpha^2 + 30 * \alpha - 6) * \beta^2 + (-2 * \alpha^6 + 6 * \alpha^5 - 20 * \alpha^3 + 30 * \alpha^2 - 18 * \alpha + 4) * \beta - \alpha^4 + 4 * \alpha^3 - \\
 & 6 * \alpha^2 + 4 * \alpha - 1) \\
 D = & ((\beta^5 * (L^{\alpha^6} * (6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta)) - 8) + 18 * L^{\alpha^4} * \ln(L * \beta)) + L^{\alpha^3} * (-6 * \ln(L * \beta)) - \\
 & 1) + L^{\alpha^5} * (9 - \\
 & 18 * \ln(L * \beta))) + \beta^3 * (L^{\alpha^5} * (6 * \ln(L * \beta)) + 3) + L^{\alpha^3} * (6 * \ln(L * \beta)) + 3) + L^{\alpha^4} * (- \\
 & 12 * \ln(L * \beta) - 6) + (2 * L^{\alpha^6} - 6 * L^{\alpha^5} + 6 * L^{\alpha^4} - \\
 & 2 * L^{\alpha^3}) * \beta^2) * \theta_1) / (\beta^3 * (\alpha^4 * (24 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta)) - 24 * \ln(L * \beta)) - 80) + \alpha^3 * (- \\
 & 12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 12 * \ln(L * \beta) + 112) + \alpha^5 * (-12 * \ln(L * (\alpha - \\
 & 1) * \beta + L * \beta) + 12 * \ln(L * \beta) + 22) - 76 * \alpha^2 + 26 * \alpha - 4) + \beta^4 * (\alpha^5 * (18 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta)) - \\
 & 18 * \ln(L * \beta) + 57) + \alpha^3 * (12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta)) - 12 * \ln(L * \beta) - 32) + \alpha^6 * (6 * \ln(L * (\alpha - \\
 & 1) * \beta + L * \beta)) - 6 * \ln(L * \beta) - 50) + \alpha^7 * (-6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 6 * \ln(L * \beta) + 14) + \alpha^4 * (- \\
 & 30 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 30 * \ln(L * \beta) - 7) + 24 * \alpha^2 - 7 * \alpha + 1) + (6 * \alpha^6 - 36 * \alpha^5 + 90 * \alpha^4 - \\
 & 120 * \alpha^3 + 90 * \alpha^2 - 36 * \alpha + 6) * \beta^2 + (-2 * \alpha^7 + 8 * \alpha^6 - 6 * \alpha^5 - 20 * \alpha^4 + 50 * \alpha^3 - \\
 & 48 * \alpha^2 + 22 * \alpha - 4) * \beta - \alpha^5 + 5 * \alpha^4 - 10 * \alpha^3 + 10 * \alpha^2 - 5 * \alpha + 1) \\
 E_1 = & ((\beta^3 * (\alpha^3 * (-12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta)) + 12 * \ln(L * \beta) + 22) - 36 * \alpha^2 + 18 * \alpha - 4) + (3 * \alpha^4 - \\
 & 12 * \alpha^3 + 18 * \alpha^2 - 12 * \alpha + 3) * \beta^2 - \alpha^3 + 3 * \alpha^2 - 3 * \alpha + 1) * \theta_1) / (\beta^4 * (\alpha^3 * (12 * \ln(L * (\alpha - \\
 & 1) * \beta + L * \beta)) - 12 * \ln(L * \beta)) - 1) + \alpha^5 * (-6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 6 * \ln(L * \beta) + 14) + \alpha^4 * (- \\
 & 6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 6 * \ln(L * \beta) - 22) + 13 * \alpha^2 - 5 * \alpha + 1) + \beta^3 * (\alpha^3 * (-12 * \ln(L * (\alpha - \\
 & 1) * \beta + L * \beta) + 12 * \ln(L * \beta) + 22) - 36 * \alpha^2 + 18 * \alpha - 4) + (6 * \alpha^4 - 24 * \alpha^3 + 36 * \alpha^2 - \\
 & 24 * \alpha + 6) * \beta^2 + (-2 * \alpha^5 + 4 * \alpha^4 + 4 * \alpha^3 - 16 * \alpha^2 + 14 * \alpha - 4) * \beta - \alpha^3 + 3 * \alpha^2 - 3 * \alpha + 1)
 \end{aligned}$$

$$F = -((\beta^3(L^3\alpha^3(-6\ln((L(\alpha-1)\beta+L\beta))+6\ln((L\beta))+11)-18L^2\alpha^2+9L\alpha-2L)+(2L^3\alpha^4-8L^2\alpha^3+12L\alpha^2-8L\alpha+2L)\beta^2)\theta_1)/(\beta^4(\alpha^3(12\ln((L(\alpha-1)\beta+L\beta))-12\ln((L\beta))-1)+\alpha^5(-6\ln((L(\alpha-1)\beta+L\beta))+6\ln((L\beta))+14)+\alpha^4(-6\ln((L(\alpha-1)\beta+L\beta))+6\ln((L\beta))-22)+13\alpha^2-5\alpha+1)+\beta^3(\alpha^3(-12\ln((L(\alpha-1)\beta+L\beta))+12\ln((L\beta))+22)-36\alpha^2+18\alpha-4)+(6\alpha^4-24\alpha^3+36\alpha^2-24\alpha+6)\beta^2+(-2\alpha^5+4\alpha^4+4\alpha^3-16\alpha^2+14\alpha-4)\beta-\alpha^3+3\alpha^2-3\alpha+1)$$

Teniendo como resultado las siguientes funciones de forma:

- **Para:  $0 \leq x < \beta L$**

$$\phi_3(x) * \theta_1$$

$$= -\frac{\frac{AL^3\beta^3 \ln(L\beta + x(\alpha - 1))}{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1} + \frac{AL^4\beta^4 + (BL^3 - BL^3\alpha)\beta^3}{(2L\alpha^3 - 6L\alpha^2 + 6L\alpha - 2L)\beta + x(2\alpha^4 - 8\alpha^3 + 12\alpha^2 - 8\alpha + 2)}}{E * I_\alpha} + Cx + D \tag{15}$$

- **Para:  $\beta L \leq x < L$**

$$\phi_3(x) * \theta_1 = \frac{Ax^3}{6} + \frac{Bx^2}{2} + E1x + F \tag{16}$$

Pasando el análisis al nudo final de la media cartela se tiene que las condiciones para determinar la función  $\phi_5(x)$  son:

$$\begin{aligned} x = 0 & \quad \theta = 0 \\ x = 0 & \quad v = 0 \\ x = L & \quad \theta = 0 \\ x = L & \quad v = v_2 \end{aligned}$$

Con estas consideraciones, las ecuaciones que cambian para el cálculo de las constantes de integración son:

$$C - \frac{AL^4\beta^4 + (BL^3\alpha - BL^3)\beta^3}{EI\alpha(2L^2\alpha^2 - 4L^2\alpha + 2L^2)\beta^2} = 0$$

$$\frac{AL^3}{6} + \frac{BL^2}{2} + E1L + F = v_2$$

Resolviendo el sistema lineal se tiene que las constantes son:

$$A = \frac{((6 * E * I_a * v_2^2 * \alpha^8 - 12 * E * I_a * v_2^2 * \alpha^7 - 12 * E * I_a * v_2^2 * \alpha^6 + 48 * E * I_a * v_2^2 * \alpha^5 - 42 * E * I_a * v_2^2 * \alpha^4 + 12 * E * I_a * v_2^2 * \alpha^3) * \beta + 12 * E * I_a * v_2^2 * \alpha^6 - 36 * E * I_a * v_2^2 * \alpha^5 + 36 * E * I_a * v_2^2 * \alpha^4 - 12 * E * I_a * v_2^2 * \alpha^3) / (\beta^4 * (L^3 * \alpha^3 * (12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) - 12 * \ln(L * \beta) - 1) + L^3 * \alpha^5 * (-6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 6 * \ln(L * \beta) + 14) + L^3 * \alpha^4 * (-6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 6 * \ln(L * \beta) - 22) + 13 * L^3 * \alpha^2 - 5 * L^3 * \alpha + L^3) + \beta^3 * (L^3 * \alpha^3 * (-12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 12 * \ln(L * \beta) + 22) - 36 * L^3 * \alpha^2 + 18 * L^3 * \alpha - 4 * L^3) + (6 * L^3 * \alpha^4 - 24 * L^3 * \alpha^3 + 36 * L^3 * \alpha^2 - 24 * L^3 * \alpha + 6 * L^3) * \beta^2 + (-2 * L^3 * \alpha^5 + 4 * L^3 * \alpha^4 + 4 * L^3 * \alpha^3 - 16 * L^3 * \alpha^2 + 14 * L^3 * \alpha - 4 * L^3) * \beta - L^3 * \alpha^3 + 3 * L^3 * \alpha^2 - 3 * L^3 * \alpha + L^3)}$$

$$B = \frac{((6 * E * I_a * v_2^2 * \alpha^7 - 24 * E * I_a * v_2^2 * \alpha^6 + 36 * E * I_a * v_2^2 * \alpha^5 - 24 * E * I_a * v_2^2 * \alpha^4 + 6 * E * I_a * v_2^2 * \alpha^3) * \beta^2 + 6 * E * I_a * v_2^2 * \alpha^6 - 18 * E * I_a * v_2^2 * \alpha^5 + 18 * E * I_a * v_2^2 * \alpha^4 - 6 * E * I_a * v_2^2 * \alpha^3) / (\beta^4 * (L^2 * \alpha^3 * (12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) - 12 * \ln(L * \beta) - 1) + L^2 * \alpha^5 * (-6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 6 * \ln(L * \beta) + 14) + L^2 * \alpha^4 * (-6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 6 * \ln(L * \beta) - 22) + 13 * L^2 * \alpha^2 - 5 * L^2 * \alpha + L^2) + \beta^3 * (L^2 * \alpha^3 * (-12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 12 * \ln(L * \beta) + 22) - 36 * L^2 * \alpha^2 + 18 * L^2 * \alpha - 4 * L^2) + (6 * L^2 * \alpha^4 - 24 * L^2 * \alpha^3 + 36 * L^2 * \alpha^2 - 24 * L^2 * \alpha + 6 * L^2) * \beta^2 + (-2 * L^2 * \alpha^5 + 4 * L^2 * \alpha^4 + 4 * L^2 * \alpha^3 - 16 * L^2 * \alpha^2 + 14 * L^2 * \alpha - 4 * L^2) * \beta - L^2 * \alpha^3 + 3 * L^2 * \alpha^2 - 3 * L^2 * \alpha + L^2)}$$

$$C = \frac{((9 * v_2^2 * \alpha^5 - 18 * v_2^2 * \alpha^4 + 9 * v_2^2 * \alpha^3) * \beta^3 + (6 * v_2^2 * \alpha^4 - 6 * v_2^2 * \alpha^3) * \beta^2 + (-3 * v_2^2 * \alpha^5 + 6 * v_2^2 * \alpha^4 - 3 * v_2^2 * \alpha^3) * \beta) / (\beta^4 * (L * \alpha^3 * (12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) - 12 * \ln(L * \beta) - 1) + L * \alpha^5 * (-6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 6 * \ln(L * \beta) + 14) + L * \alpha^4 * (-6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 6 * \ln(L * \beta) - 22) + 13 * L * \alpha^2 - 5 * L * \alpha + L) + \beta^3 * (L * \alpha^3 * (-12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 12 * \ln(L * \beta) + 22) - 36 * L * \alpha^2 + 18 * L * \alpha - 4 * L) + (6 * L * \alpha^4 - 24 * L * \alpha^3 + 36 * L * \alpha^2 - 24 * L * \alpha + 6 * L) * \beta^2 + (-2 * L * \alpha^5 + 4 * L * \alpha^4 + 4 * L * \alpha^3 - 16 * L * \alpha^2 + 14 * L * \alpha - 4 * L) * \beta - L * \alpha^3 + 3 * L * \alpha^2 - 3 * L * \alpha + L)}$$

$$D = \frac{(\beta^4 * (\alpha^5 * (6 * v_2^2 * \ln(L * \beta) + 6 * v_2^2) + \alpha^4 * (6 * v_2^2 * \ln(L * \beta) - 3 * v_2^2) + \alpha^3 * (-12 * v_2^2 * \ln(L * \beta) - 3 * v_2^2)) + \alpha^3 * \beta^3 * (12 * v_2^2 * \ln(L * \beta) + 6 * v_2^2) + (3 * v_2^2 * \alpha^4 - 3 * v_2^2 * \alpha^3) * \beta^2) / (\beta^4 * (\alpha^3 * (12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) - 12 * \ln(L * \beta) - 1) + \alpha^5 * (-6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 6 * \ln(L * \beta) + 14) + \alpha^4 * (-6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 6 * \ln(L * \beta) - 22) + 13 * \alpha^2 - 5 * \alpha + 1) + \beta^3 * (\alpha^3 * (-12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 12 * \ln(L * \beta) + 22) - 36 * \alpha^2 + 18 * \alpha - 4) + (6 * \alpha^4 - 24 * \alpha^3 + 36 * \alpha^2 - 24 * \alpha + 6) * \beta^2 + (-2 * \alpha^5 + 4 * \alpha^4 + 4 * \alpha^3 - 16 * \alpha^2 + 14 * \alpha - 4) * \beta - \alpha^3 + 3 * \alpha^2 - 3 * \alpha + 1)}$$

$$E = \frac{((6 * v_2^2 * \alpha^4 - 24 * v_2^2 * \alpha^3 + 36 * v_2^2 * \alpha^2 - 24 * v_2^2 * \alpha + 6 * v_2^2) * \beta^2 + (-3 * v_2^2 * \alpha^5 + 6 * v_2^2 * \alpha^4 + 6 * v_2^2 * \alpha^3 - 24 * v_2^2 * \alpha^2 + 21 * v_2^2 * \alpha - 6 * v_2^2) * \beta) / (\beta^4 * (L * \alpha^3 * (12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) - 12 * \ln(L * \beta) - 1) + L * \alpha^5 * (-6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 6 * \ln(L * \beta) + 14) + L * \alpha^4 * (-6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 6 * \ln(L * \beta) - 22) + 13 * L * \alpha^2 - 5 * L * \alpha + L) + \beta^3 * (L * \alpha^3 * (-12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 12 * \ln(L * \beta) + 22) - 36 * L * \alpha^2 + 18 * L * \alpha - 4 * L) + (6 * L * \alpha^4 - 24 * L * \alpha^3 + 36 * L * \alpha^2 - 24 * L * \alpha + 6 * L) * \beta^2 + (-2 * L * \alpha^5 + 4 * L * \alpha^4 + 4 * L * \alpha^3 - 16 * L * \alpha^2 + 14 * L * \alpha - 4 * L) * \beta - L * \alpha^3 + 3 * L * \alpha^2 - 3 * L * \alpha + L)}$$

$$F = \frac{(\beta^4 * (\alpha^3 * (v_2^2 * (12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) - 1) - 12 * v_2^2 * \ln(L * \beta)) + \alpha^5 * (v_2^2 * (14 - 6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta)) + 6 * v_2^2 * \ln(L * \beta)) + \alpha^4 * (v_2^2 * (-6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) - 22) + 6 * v_2^2 * \ln(L * \beta)) + 13 * v_2^2 * \alpha^2 - 5 * v_2^2 * \alpha + v_2^2) + \beta^3 * (\alpha^3 * (v_2^2 * (22 - 12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta)) + 12 * v_2^2 * \ln(L * \beta)) - 36 * v_2^2 * \alpha^2 + 18 * v_2^2 * \alpha - 4 * v_2^2) + (3 * v_2^2 * \alpha^4 - 12 * v_2^2 * \alpha^3 + 18 * v_2^2 * \alpha^2 - 12 * v_2^2 * \alpha + 3 * v_2^2) * \beta^2) / (\beta^4 * (\alpha^3 * (12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) - 12 * \ln(L * \beta) - 1) + \alpha^5 * (-6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 6 * \ln(L * \beta) + 14) + \alpha^4 * (-6 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 6 * \ln(L * \beta) - 22) + 13 * \alpha^2 - 5 * \alpha + 1) + \beta^3 * (\alpha^3 * (-12 * \ln(L * (\alpha - 1) * \beta + L * \beta) + 12 * \ln(L * \beta) + 22) - 36 * \alpha^2 + 18 * \alpha - 4) + (6 * \alpha^4 - 24 * \alpha^3 + 36 * \alpha^2 - 24 * \alpha + 6) * \beta^2 + (-2 * \alpha^5 + 4 * \alpha^4 + 4 * \alpha^3 - 16 * \alpha^2 + 14 * \alpha - 4) * \beta - \alpha^3 + 3 * \alpha^2 - 3 * \alpha + 1)}$$

$$12*\ln(L*\beta)-1)+\alpha^5*(-6*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)+6*\ln(L*\beta)+14)+\alpha^4*(-6*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)+6*\ln(L*\beta)-22)+13*\alpha^2-5*\alpha+1)+\beta^3*(\alpha^3*(-12*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)+12*\ln(L*\beta)+22)-36*\alpha^2+18*\alpha-4)+(6*\alpha^4-24*\alpha^3+36*\alpha^2-24*\alpha+6)*\beta^2+(-2*\alpha^5+4*\alpha^4+4*\alpha^3-16*\alpha^2+14*\alpha-4)*\beta-\alpha^3+3*\alpha^2-3*\alpha+1)$$

Con estas constantes de integración las funciones resultantes en función de  $v_2$  son:

- **Para:  $0 \leq x < \beta L$**

$$\phi_5(x)v_2$$

$$= -\frac{AL^3\beta^3 \ln(L\beta + x(\alpha - 1))}{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1} + \frac{AL^4\beta^4 + (BL^3 - BL^3\alpha)\beta^3}{(2L\alpha^3 - 6L\alpha^2 + 6L\alpha - 2L)\beta + x(2\alpha^4 - 8\alpha^3 + 12\alpha^2 - 8\alpha + 2)} E * I_a$$

$$+ Cx + D \quad (17)$$

- **Para:  $\beta L \leq x < L$**

$$\phi_5(x)v_2 = \frac{Ax^3}{6} + \frac{Bx^2}{2} + E1x + F \quad (18)$$

Para finalizar el análisis es necesario contemplar las condiciones de la función  $\phi_6(x)$  con las siguientes condiciones:

$$x = 0 \quad \theta = 0$$

$$x = 0 \quad v = 0$$

$$x = L \quad \theta = \theta 2$$

$$x = L \quad v = 0$$

De tal manera que las ecuaciones que cambian son:

$$\frac{AL^2}{2} + \frac{BL}{E I_a \alpha^3} + E1 = \theta 2$$

$$\frac{AL^3}{6} + \frac{BL^2}{2} + E1L + F = 0$$

Con las mismas ecuaciones que se ha ido trabajando, se resuelve el sistema lineal y se tiene que las constantes de integración son:

$$A=(\beta^*(-6^*E^*Ia^*\alpha^8*\theta_2+12^*E^*Ia^*\alpha^7*\theta_2+12^*E^*Ia^*\alpha^6*\theta_2-48^*E^*Ia^*\alpha^5*\theta_2+42^*E^*Ia^*\alpha^4*\theta_2-12^*E^*Ia^*\alpha^3*\theta_2)+\beta^2*(6^*E^*Ia^*\alpha^7*\theta_2-24^*E^*Ia^*\alpha^6*\theta_2+36^*E^*Ia^*\alpha^5*\theta_2-24^*E^*Ia^*\alpha^4*\theta_2+6^*E^*Ia^*\alpha^3*\theta_2)-6^*E^*Ia^*\alpha^6*\theta_2+18^*E^*Ia^*\alpha^5*\theta_2-18^*E^*Ia^*\alpha^4*\theta_2+6^*E^*Ia^*\alpha^3*\theta_2)/(\beta^4*(L^2*\alpha^3*(12*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)-12*\ln(L*\beta)-1)+L^2*\alpha^5*(-6*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)+6*\ln(L*\beta)+14)+L^2*\alpha^4*(-6*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)+6*\ln(L*\beta)-22)+13*L^2*\alpha^2-5*L^2*\alpha+L^2)+\beta^3*(L^2*\alpha^3*(-12*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)+12*\ln(L*\beta)+22)-36*L^2*\alpha^2+18*L^2*\alpha-4*L^2)+(\beta*L^2*\alpha^4-24*L^2*\alpha^3+36*L^2*\alpha^2-24*L^2*\alpha+6*L^2)*\beta^2+(-2*L^2*\alpha^5+4*L^2*\alpha^4+4*L^2*\alpha^3-16*L^2*\alpha^2+14*L^2*\alpha-4*L^2)*\beta-L^2*\alpha^3+3*L^2*\alpha^2-3*L^2*\alpha+L^2)$$

$$B=(\beta^3*(E^*Ia^*\alpha^6*(-12*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)*\theta_2+12*\ln(L*\beta)*\theta_2+22*\theta_2)-36^*E^*Ia^*\alpha^5*\theta_2+18^*E^*Ia^*\alpha^4*\theta_2-4^*E^*Ia^*\alpha^3*\theta_2)+\beta^2*(6^*E^*Ia^*\alpha^7*\theta_2-24^*E^*Ia^*\alpha^6*\theta_2+36^*E^*Ia^*\alpha^5*\theta_2-24^*E^*Ia^*\alpha^4*\theta_2+6^*E^*Ia^*\alpha^3*\theta_2)+2^*E^*Ia^*\alpha^6*\theta_2-6^*E^*Ia^*\alpha^5*\theta_2+6^*E^*Ia^*\alpha^4*\theta_2-2^*E^*Ia^*\alpha^3*\theta_2)/(\beta^4*(L*\alpha^3*(12*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)-12*\ln(L*\beta)-1)+L*\alpha^5*(-6*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)+6*\ln(L*\beta)+14)+L*\alpha^4*(-6*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)+6*\ln(L*\beta)-22)+13*L*\alpha^2-5*L*\alpha+L)+\beta^3*(L*\alpha^3*(-12*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)+12*\ln(L*\beta)+22)-36*L*\alpha^2+18*L*\alpha-4*L)+(\beta*L*\alpha^4-24*L*\alpha^3+36*L*\alpha^2-24*L*\alpha+6*L)*\beta^2+(-2*L*\alpha^5+4*L*\alpha^4+4*L*\alpha^3-16*L*\alpha^2+14*L*\alpha-4*L)*\beta-L*\alpha^3+3*L*\alpha^2-3*L*\alpha+L)$$

$$C=(\beta^4*(\alpha^6*(-6*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)*\theta_2+6*\ln(L*\beta)*\theta_2+14*\theta_2)-27*\alpha^5*\theta_2+18*\alpha^4*\theta_2-5*\alpha^3*\theta_2)+\beta*(\alpha^6*\theta_2-3*\alpha^5*\theta_2+3*\alpha^4*\theta_2-\alpha^3*\theta_2)+\beta^3*(-9*\alpha^6*\theta_2+27*\alpha^5*\theta_2-27*\alpha^4*\theta_2+9*\alpha^3*\theta_2)+\beta^2*(-3*\alpha^5*\theta_2+6*\alpha^4*\theta_2-3*\alpha^3*\theta_2))/(\beta^4*(\alpha^4*(18*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)-18*\ln(L*\beta)+21)+\alpha^6*(-6*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)+6*\ln(L*\beta)+14)+\alpha^3*(-12*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)+12*\ln(L*\beta)+14)-36*\alpha^5-18*\alpha^2+6*\alpha-1)+\beta^3*(\alpha^3*(12*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)-12*\ln(L*\beta)-58)+\alpha^4*(-12*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)+12*\ln(L*\beta)+22)+54*\alpha^2-22*\alpha+4)+(\beta*\alpha^5-30*\alpha^4+60*\alpha^3-60*\alpha^2+30*\alpha-6)*\beta^2+(-2*\alpha^6+6*\alpha^5-20*\alpha^3+30*\alpha^2-18*\alpha+4)*\beta-\alpha^4+4*\alpha^3-6*\alpha^2+4*\alpha-1)$$

$$D=(\beta^5*(L*\alpha^6*(6*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)*\theta_2-8*\theta_2)+L*\alpha^3*(-6*\ln(L*\beta)*\theta_2-\theta_2)+L*\alpha^5*(9*\theta_2-18*\ln(L*\beta)*\theta_2)+18*L*\alpha^4*\ln(L*\beta)*\theta_2)+\beta^4*(L*\alpha^5*(18*\ln(L*\beta)*\theta_2-9*\theta_2)+L*\alpha^3*(12*\ln(L*\beta)*\theta_2+3*\theta_2)+L*\alpha^6*(6*\ln(L*\beta)*\theta_2+15*\theta_2)+L*\alpha^7*(-6*\ln(L*\beta)*\theta_2-6*\theta_2)+L*\alpha^4*(-30*\ln(L*\beta)*\theta_2-3*\theta_2))+\beta^3*(L*\alpha^4*(12*\ln(L*\beta)*\theta_2+6*\theta_2)+L*\alpha^5*(-6*\ln(L*\beta)*\theta_2-3*\theta_2)+L*\alpha^3*(-6*\ln(L*\beta)*\theta_2-3*\theta_2))+\beta^2*(-L*\alpha^6*\theta_2+3*L*\alpha^5*\theta_2-3*L*\alpha^4*\theta_2+L*\alpha^3*\theta_2))/(\beta^3*(\alpha^4*(24*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)-24*\ln(L*\beta)-80)+\alpha^3*(-12*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)+12*\ln(L*\beta)+112)+\alpha^5*(-12*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)+12*\ln(L*\beta)+22)-76*\alpha^2+26*\alpha-4)+\beta^4*(\alpha^5*(18*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)-18*\ln(L*\beta)+57)+\alpha^3*(12*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)-12*\ln(L*\beta)-32)+\alpha^6*(6*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)-6*\ln(L*\beta)-50)+\alpha^7*(-6*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)+6*\ln(L*\beta)+14)+\alpha^4*(-30*\ln(L*(\alpha-1)*\beta+L*\beta)+30*\ln(L*\beta)-7)+24*\alpha^2-7*\alpha+1)+(\beta*\alpha^6-36*\alpha^5+90*\alpha^4-120*\alpha^3+90*\alpha^2-36*\alpha+6)*\beta^2+(-2*\alpha^7+8*\alpha^6-6*\alpha^5-20*\alpha^4+50*\alpha^3-48*\alpha^2+22*\alpha-4)*\beta-\alpha^5+5*\alpha^4-10*\alpha^3+10*\alpha^2-5*\alpha+1)$$

$$E1 = (\beta^4 \alpha^3 (12 \ln(L^*(\alpha-1)\beta + L\beta) \theta_2 - 12 \ln(L\beta) \theta_2 - \theta_2) + \alpha^5 (-6 \ln(L^*(\alpha-1)\beta + L\beta) \theta_2 + 6 \ln(L\beta) \theta_2 + 14 \theta_2) + \alpha^4 (-6 \ln(L^*(\alpha-1)\beta + L\beta) \theta_2 + 6 \ln(L\beta) \theta_2 - 22 \theta_2) + 13 \alpha^2 \theta_2 - 5 \alpha \theta_2 + \theta_2) + \beta (\alpha^5 \theta_2 - 2 \alpha^4 \theta_2 - 2 \alpha^3 \theta_2 + 8 \alpha^2 \theta_2 - 7 \alpha \theta_2 + 2 \theta_2) + \beta^2 (-3 \alpha^4 \theta_2 + 12 \alpha^3 \theta_2 - 18 \alpha^2 \theta_2 + 12 \alpha \theta_2 - 3 \theta_2) / (\beta^4 \alpha^3 (12 \ln(L^*(\alpha-1)\beta + L\beta) - 12 \ln(L\beta) - 1) + \alpha^5 (-6 \ln(L^*(\alpha-1)\beta + L\beta) + 6 \ln(L\beta) + 14) + \alpha^4 (-6 \ln(L^*(\alpha-1)\beta + L\beta) + 6 \ln(L\beta) - 22) + 13 \alpha^2 - 5 \alpha + 1) + \beta^3 (\alpha^3 (-12 \ln(L^*(\alpha-1)\beta + L\beta) + 12 \ln(L\beta) + 22) - 36 \alpha^2 + 18 \alpha - 4) + (6 \alpha^4 - 24 \alpha^3 + 36 \alpha^2 - 24 \alpha + 6) \beta^2 + (-2 \alpha^5 + 4 \alpha^4 + 4 \alpha^3 - 16 \alpha^2 + 14 \alpha - 4) \beta - \alpha^3 + 3 \alpha^2 - 3 \alpha + 1)$$

$$F = (\beta^4 (L \alpha^3 (12 \ln(L^*(\alpha-1)\beta + L\beta) \theta_2 - 12 \ln(L\beta) \theta_2 - \theta_2) + L \alpha^5 (-6 \ln(L^*(\alpha-1)\beta + L\beta) \theta_2 + 6 \ln(L\beta) \theta_2 + 14 \theta_2) + L \alpha^4 (-6 \ln(L^*(\alpha-1)\beta + L\beta) \theta_2 + 6 \ln(L\beta) \theta_2 - 22 \theta_2) + 13 L \alpha^2 \theta_2 - 5 L \alpha \theta_2 + L \theta_2) + \beta^3 (L \alpha^3 (-6 \ln(L^*(\alpha-1)\beta + L\beta) \theta_2 + 6 \ln(L\beta) \theta_2 + 11 \theta_2) - 18 L \alpha^2 \theta_2 + 9 L \alpha \theta_2 - 2 L \theta_2) + \beta^2 (L \alpha^4 \theta_2 - 4 L \alpha^3 \theta_2 + 6 L \alpha^2 \theta_2 - 4 L \alpha \theta_2 + L \theta_2) / (\beta^4 \alpha^3 (12 \ln(L^*(\alpha-1)\beta + L\beta) - 12 \ln(L\beta) - 1) + \alpha^5 (-6 \ln(L^*(\alpha-1)\beta + L\beta) + 6 \ln(L\beta) + 14) + \alpha^4 (-6 \ln(L^*(\alpha-1)\beta + L\beta) + 6 \ln(L\beta) - 22) + 13 \alpha^2 - 5 \alpha + 1) + \beta^3 (\alpha^3 (-12 \ln(L^*(\alpha-1)\beta + L\beta) + 12 \ln(L\beta) + 22) - 36 \alpha^2 + 18 \alpha - 4) + (6 \alpha^4 - 24 \alpha^3 + 36 \alpha^2 - 24 \alpha + 6) \beta^2 + (-2 \alpha^5 + 4 \alpha^4 + 4 \alpha^3 - 16 \alpha^2 + 14 \alpha - 4) \beta - \alpha^3 + 3 \alpha^2 - 3 \alpha + 1)$$

De la misma manera las funciones de forma resultantes en función de  $\theta_2$  son:

- **Para:  $0 \leq x < \beta L$**

$$\phi_6(x) * \theta_2$$

$$= - \frac{AL^3 \beta^3 \ln(L\beta + x(\alpha - 1))}{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 1} + \frac{AL^4 \beta^4 + (BL^3 - BL^3 \alpha) \beta^3}{(2L\alpha^3 - 6L\alpha^2 + 6L\alpha - 2L)\beta + x(2\alpha^4 - 8\alpha^3 + 12\alpha^2 - 8\alpha + 2)} \\ + Cx + D \quad E * I_a \quad (19)$$

- **Para:  $\beta L \leq x < L$**

$$\phi_6(x) * \theta_2 = \frac{Ax^3}{6} + \frac{Bx^2}{2} + E1x + F \quad (20)$$

Cabe destacar que, por la longitud de las constantes, no se ha hecho la simplificación del módulo de elasticidad multiplicado por la inercia  $I_a$ , por lo que, al momento de realizar el cálculo manual, los valores que estas tomen son despreciables.

### 3. TABLAS DE CÁLCULO

Con las funciones de forma 13 a 20, se han generado tablas con las relaciones  $\alpha$  y  $\beta$  más comunes para encontrar las reacciones de empotramiento perfecto considerando una carga uniformemente distribuida a lo largo de toda la viga.

**Tablas de cortante**

El coeficiente presentado en las tablas se da para ser usado de la siguiente manera:

$$V = C * P * L$$

Siendo, *C* el coeficiente determinado en la tabla, *P* el valor de carga aplicado y *L* la longitud de la viga.

**Tabla 1** Coeficientes para determinar cortante en el nudo inicial de la viga.

$\beta$ la	0,95	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,65	0,6	0,55	0,5	0,45	0,4
0,5	0,50519	0,51078	0,51684	0,52342	0,53061	0,53848	0,54716	0,55676	0,56743	0,57933	0,59264	0,60754
0,45	0,50522	0,51086	0,51696	0,52358	0,53080	0,53868	0,54733	0,55683	0,56729	0,57882	0,59152	0,60548
0,4	0,50524	0,51088	0,51697	0,52356	0,53071	0,53847	0,54691	0,55609	0,56608	0,57694	0,58868	0,60133
0,35	0,50520	0,51078	0,51678	0,52322	0,53016	0,53762	0,54565	0,55428	0,56353	0,57342	0,58392	0,59498
0,3	0,50508	0,51050	0,51627	0,52242	0,52897	0,53594	0,54333	0,55117	0,55943	0,56810	0,57714	0,58647
0,25	0,50484	0,50994	0,51533	0,52100	0,52696	0,53322	0,53976	0,54658	0,55364	0,56093	0,56838	0,57592
0,2	0,50442	0,50903	0,51383	0,51881	0,52397	0,52930	0,53479	0,54041	0,54613	0,55192	0,55775	0,56354
0,15	0,50378	0,50767	0,51165	0,51572	0,51987	0,52408	0,52834	0,53262	0,53691	0,54118	0,54540	0,54954

**Tabla 2** Coeficientes para determinar el cortante en el nudo final de la viga.

$\beta$ la	0,95	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,65	0,6	0,55	0,5	0,45	0,4
0,5	0,49481	0,48922	0,48316	0,47658	0,46939	0,46152	0,45284	0,44324	0,43257	0,42067	0,40736	0,39246
0,45	0,49478	0,48914	0,48304	0,47642	0,46920	0,46132	0,45267	0,44317	0,43271	0,42118	0,40848	0,39452
0,4	0,49476	0,48912	0,48303	0,47644	0,46929	0,46153	0,45309	0,44391	0,43392	0,42306	0,41132	0,39867
0,35	0,49480	0,48922	0,48322	0,47678	0,46984	0,46238	0,45435	0,44572	0,43647	0,42658	0,41608	0,40502
0,3	0,49492	0,48950	0,48373	0,47758	0,47103	0,46406	0,45667	0,44883	0,44057	0,43190	0,42286	0,41353
0,25	0,49516	0,49006	0,48467	0,47900	0,47304	0,46678	0,46024	0,45342	0,44636	0,43907	0,43162	0,42408
0,2	0,49558	0,49097	0,48617	0,48119	0,47603	0,47070	0,46521	0,45959	0,45387	0,44808	0,44225	0,43646
0,15	0,49622	0,49233	0,48835	0,48428	0,48013	0,47592	0,47166	0,46738	0,46309	0,45882	0,45460	0,45046

En caso de que la cartela se encuentre en el nudo final de la viga, los coeficientes para determinar cortante en el nudo inicial deberán ser tomados de la tabla 2 y para el cortante en el nudo final se debe tomar los coeficientes de la tabla 1.

**Tablas para momento**

Los coeficientes presentados en estas tablas se deben utilizar de la siguiente manera:

$$M = C * P * L^2$$

Siendo, *C* el coeficiente determinado en la tabla, *P* el valor de carga aplicado y *L* la longitud de la viga.

**Tabla 3** Coeficientes para determinar el momento en el nudo inicial.

$\beta/\alpha$	0,95	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,65	0,6	0,55	0,5	0,45	0,4
0,5	0,08676	0,09049	0,09459	0,09910	0,10410	0,10960	0,11570	0,12260	0,13030	0,13900	0,14880	0,15990
0,45	0,08685	0,09067	0,09480	0,09940	0,10450	0,11000	0,11610	0,12290	0,13050	0,13890	0,14820	0,15850
0,4	0,08690	0,09077	0,09500	0,09960	0,10460	0,11000	0,11600	0,12260	0,12980	0,13760	0,14620	0,15540
0,35	0,08690	0,09075	0,09490	0,09940	0,10420	0,10950	0,11520	0,12130	0,12790	0,13500	0,14260	0,15060
0,3	0,08683	0,09057	0,09460	0,09880	0,10340	0,10830	0,11350	0,11900	0,12490	0,13110	0,13750	0,14420
0,25	0,08666	0,09018	0,09390	0,09780	0,10200	0,10630	0,11090	0,11570	0,12060	0,12580	0,13100	0,13640
0,2	0,08636	0,08953	0,09280	0,09630	0,09980	0,10350	0,10730	0,11120	0,11520	0,11920	0,12330	0,12740
0,15	0,08591	0,08857	0,09130	0,09410	0,09690	0,09980	0,10270	0,10570	0,10860	0,11160	0,11450	0,11740

**Tabla 4** Coeficientes para determinar el momento en el nudo final.

$\beta/\alpha$	0,95	0,9	0,85	0,8	0,75	0,7	0,65	0,6	0,55	0,5	0,45	0,4
0,5	-0,08157	-0,07971	-0,07775	-0,07567	-0,07345	-0,07109	-0,06855	-0,06581	-0,06286	-0,05965	-0,05617	-0,05238
0,45	-0,08162	-0,07981	-0,07789	-0,07584	-0,07366	-0,07132	-0,06882	-0,06612	-0,06321	-0,06007	-0,05669	-0,05306
0,4	-0,08166	-0,07989	-0,07800	-0,07600	-0,07385	-0,07156	-0,06911	-0,06649	-0,06368	-0,06068	-0,05748	-0,05410
0,35	-0,08170	-0,07997	-0,07813	-0,07617	-0,07409	-0,07188	-0,06953	-0,06704	-0,06439	-0,06161	-0,05868	-0,05564
0,3	-0,08175	-0,08007	-0,07830	-0,07643	-0,07445	-0,07237	-0,07018	-0,06788	-0,06547	-0,06297	-0,06039	-0,05775
0,25	-0,08182	-0,08024	-0,07857	-0,07683	-0,07501	-0,07312	-0,07115	-0,06911	-0,06700	-0,06485	-0,06267	-0,06048
0,2	-0,08194	-0,08050	-0,07900	-0,07745	-0,07585	-0,07421	-0,07253	-0,07081	-0,06907	-0,06732	-0,06557	-0,06383
0,15	-0,08213	-0,08090	-0,07964	-0,07835	-0,07704	-0,07572	-0,07439	-0,07305	-0,07172	-0,07040	-0,06909	-0,06782

En caso de que la cartela se encuentre en el nudo final de la viga, los coeficientes para determinar el momento en el nudo inicial deberán ser tomados de la tabla 4 y para el momento en el nudo final se debe tomar los coeficientes de la tabla 3, conjuntamente se debe invertir los signos en el cálculo.

#### 4. NUEVAS FUNCIONES DE CEINCI-LAB

En Aguiar y Bonilla (2020) se presentaron las funciones para el cálculo de la matriz de rigidez, de una viga con cartelas, para tres condiciones a saber: i) Viga con cartela sin nudo intermedio; ii) Cartela al lado izquierdo; iii) Cartela al lado derecho.

En este artículo se ha presentado el cálculo de las acciones de empotramiento perfecto para dos casos: i) Cartela al lado izquierdo; ii) Cartela al lado derecho, que se muestran en la figura 4 b.

Las tablas 1 a 4, sirven para calcular las acciones de empotramiento perfecto para una cartela a la izquierda o una cartela a la derecha, ante una carga uniforme distribuida. Ahora, en lugar de usar las tablas se tiene el siguiente programa.

- **[REP]=EP\_media\_cartela(b,h,H,L,Lv,carga,Tipo)**

El programa **EP\_media\_cartela**, encuentra las acciones de empotramiento perfecto para una viga con cartela a la izquierda o a la derecha; el código para saber la ubicación de la cartela es mediante la variable **Tipo**, si la cartela está a la izquierda **Tipo=0**, si está a la derecha **Tipo=1**.

Los restantes datos son la base  $b$ ; la altura en el centro de luz  $h$ ; la altura en el extremo de la viga  $H$ ; la longitud de la viga  $L$ ; la longitud de la cartela  $L_v$ ; el valor de la carga uniforme distribuida se da a continuación en la variable **carga**, finalmente se indica la ubicación de la cartela en **Tipo**.

Las acciones de empotramiento perfecto vienen en el vector **REP**

- **[FF]=fuerzas\_cartelas(ngl,ELEM,L,seno,coseno,VC,E,q,Q2)**

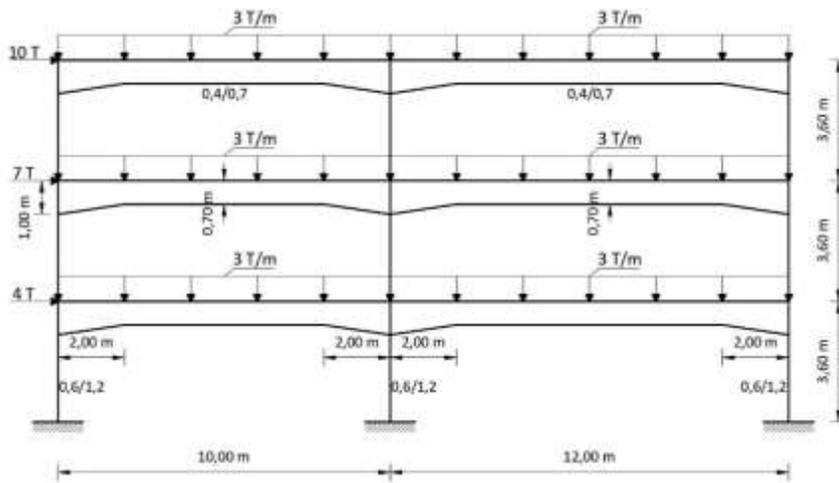
Este programa determina las fuerzas y momentos en los elementos con cartela al lado izquierda o al lado derecho. Los datos de entrada, son  $ngl$ , número de grados de libertad; **ELEM**, matriz que contiene para cada elemento con cartela:  $b$   $h$   $H$   $L_v$  **Tipo**, que son la base, altura en centro de luz, altura en el extremo, la longitud de la cartela y la variable **Tipo**, ya explicada en la función anterior;  $L$  es un vector con la longitud de cada elemento con cartela; **seno**, **coseno**, son vectores con los valores de las funciones trigonométricas seno y coseno del elemento; **VC**, es una matriz con los vectores de colocación de los elementos;  $E$ , es el módulo de elasticidad del hormigón;  $q$ , es un vector con los desplazamientos y nudos de la estructura;  $Q_2$ , es una matriz con las acciones de empotramiento perfecto de las vigas con cartelas.

## 5. USO DE FUNCIONES DE CEINCI-LAB

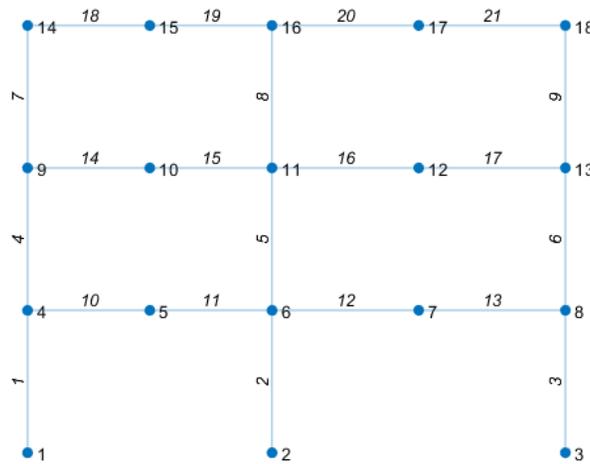
Se presenta un programa, utilizando el sistema de computación **CEINCI-LAB** para encontrar las fuerzas y momentos en los elementos de la estructura de hormigón armado indicada en la figura 5 a, las cartelas son de 40/70 cm, en el centro de luz; 40/100 cm, en los extremos y la longitud de las cartelas lineales simétricas es de 200 cm. Las columnas son de 60/120 cm. El módulo  $E = 2400000 \text{ T/m}^2$ .

En la figura 5 b, se presenta la numeración de nudos y elementos, primero se numeran las columnas y luego las vigas con cartelas. La matriz de rigidez de la estructura se obtiene para los grados de libertad mostrados en la figura 5 c, y se encuentra primero la contribución de las columnas (elementos 1 a la 9) con la función **krigidez**, después se halla la contribución a la matriz de rigidez de las cartelas con la función **krigidez\_cartela\_nudointermedio** (elementos 10 al 21) Se recomienda ver Aguiar y Bonilla (2020), Aguiar *et al.* (2019), donde se halla explicado el cálculo de la matriz de rigidez.

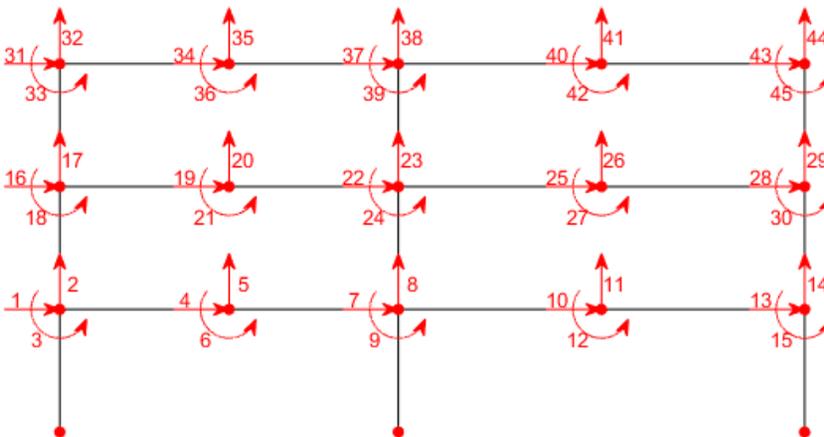
El marco teórico del Vector de Cargas  $Q$ , de la matriz de rigidez de la estructura  $K$ , del vector de coordenadas  $q$ , y de las fuerzas y momentos en cada uno de los elementos, se encuentra bien detallado en Aguiar (2020). Está el marco teórico y el uso de las funciones de **CEINCI-LAB** para los temas que se tratan en el libro.



(a)



(b)



**Figura 5** Pórtico plano, con vigas que tienen cartelas lineales simétricas; a) Dimensiones de los elementos y de la estructura; b) Numeración de nudos y elementos; c) Identificación de los grados de libertad.

Los programas del sistema de computación **CEINCI-LAB** que se utilizan para realizar el análisis estático y dinámico de estructuras con cartelas lineales, se hallan en la partición del primero de los autores en **research gate**, en la carpeta de tablas.

En el Anexo 1, se lista el programa utilizado para resolver la estructura de la figura 5 a, y en las tablas 5 y 6 se indican las fuerzas y momentos en coordenadas locales de las columnas y de las vigas, en el siguiente orden: fuerza axial en nudo inicial **N1** en Ton; fuerza de corte en nudo inicial **V1** en Ton; momento en nudo inicial **M1** en Ton m; fuerza axial en nudo final **N2** en Ton; fuerza de corte en nudo final **V2** en Ton; momento en nudo final **M2** en Ton m.

**Tabla 5** Fuerzas y Momentos en coordenadas locales en columnas.

TIPO	NÚMERO	N1	V1	M1	N2	V2	M2
COLUMNA	1	42.33	3.41	34.19	-42.33	-3.41	-21.90
	2	92.32	6.03	37.37	-92.32	-6.03	-15.66
	3	45.35	11.55	43.67	-45.35	-11.55	-2.08
	4	27.89	-1.78	2.23	-27.89	1.78	-8.63
	5	61.72	2.36	9.00	-61.72	-2.36	-0.49
	6	30.39	9.42	22.02	-30.39	-9.42	11.88
	7	13.86	-7.06	-8.90	-13.86	7.06	-16.53
	8	31.01	-1.42	-2.33	-31.01	1.42	-2.80
	9	15.12	8.49	9.89	-15.12	-8.49	20.67

**Tabla 6** Fuerzas y momentos en coordenadas locales en vigas.

TIPO	NÚMERO	N1	V1	M1	N2	V2	M2
VIGA	10	-1.19	14.44	19.66	1.19	0.56	15.04
	11	-1.19	-0.56	-15.04	1.19	15.56	-19.49
	12	-4.86	15.04	26.15	4.86	-0.04	18.49
	13	2.14	0.04	-18.50	-2.14	14.96	-19.94
	14	-5.29	14.02	17.54	5.29	0.98	15.08
	15	4.71	-0.98	-15.07	-4.71	15.98	-21.53
	16	0.93	14.73	24.35	-0.93	0.27	18.48
	17	0.93	-0.27	-18.48	-0.93	15.27	-21.77
	18	7.06	13.86	16.53	-7.06	1.14	15.28
	19	7.06	-1.14	-15.28	-7.06	16.14	-22.14
	20	8.49	14.87	24.93	-8.49	0.13	18.74
	21	8.49	-0.13	-18.74	-8.49	15.13	-20.67

## 6. VALIDACIÓN DE RESULTADOS

Para validar el cálculo de las acciones de empotramiento perfecto, en vigas con cartela a la izquierda o la derecha, se analiza una viga de 10 m, de longitud; cuyas dimensiones son:  $b = 0.4 \text{ m}$ ;  $h = 0.6 \text{ m}$ ;  $H = 0.8 \text{ m}$ ;  $L_v = 2.0 \text{ m}$ ;  $L = 5.0 \text{ m}$ ; la longitud es 5 m, ya que el modelo de cálculo considera nudo en la mitad de la viga.

Se calcula de tres maneras, a saber: i) Mediante el uso de las tablas 1 a 4; ii) Con el programa Sap 2000; iii) Con el programa **EP\_media\_cartela**

- **Uso de tablas 1 a 4 presentadas en este artículo**

$$\beta = \frac{2}{5} = 0.4 \quad \alpha = \frac{0.6}{0.8} = 0.75$$

De las tablas (1 a 4) se obtiene que los coeficientes necesarios para calcular las acciones de empotramiento perfecto, éstos son:

Nudo inicial

$$CV1 = 0.53071 \quad CM1 = 0.1046$$

Nudo final

$$CV2 = 0.46929 \quad CM2 = -0.07385$$

Con estos coeficientes se calculan las reacciones de empotramiento perfecto.

Nudo inicial

$$Cortante = 0.53071 * 8 * 5 = 21.23 \text{ Tn}$$

$$Momento = 0.1046 * 8 * 5^2 = 20.92 \text{ Tn} * m$$

Nudo final

$$Cortante = 0.46929 * 8 * 5 = 18.77 \text{ Tn}$$

$$Momento = -0.07385 * 8 * 5^2 = -14.77 \text{ Tn} * m$$

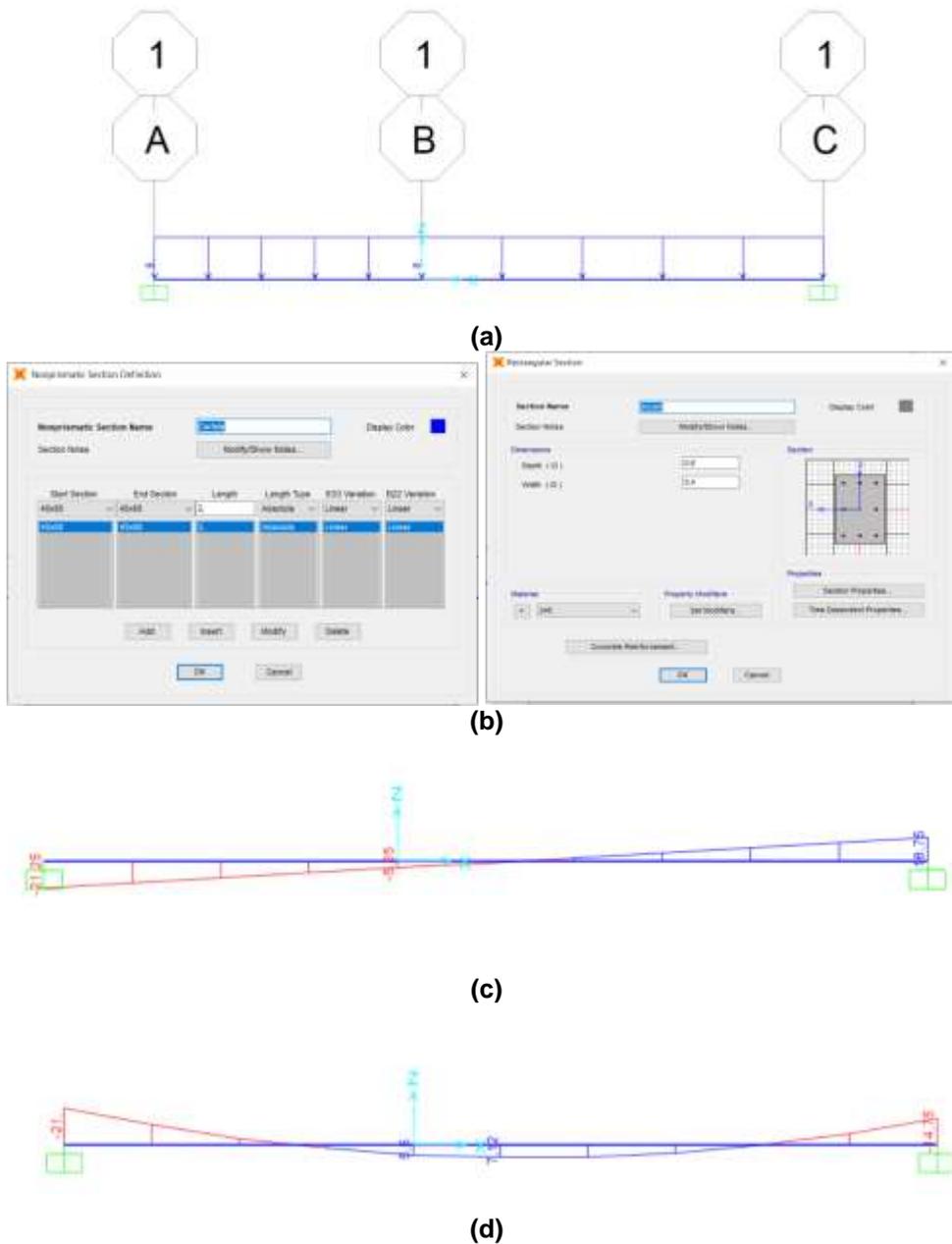
Para considerar la cartela en el nudo final se toman las consideraciones dadas en las tablas.

- **Uso de Sap 2000**

Para el Sap 2000, la viga con cartela a la izquierda se considera como que fueran dos vigas, una con variación de altura lineal y la otra de sección constante, en la figura 6 a, se presentan estos dos elementos y en la figura 6.b, a la izquierda se muestra la entrada de datos de la viga con variación de altura lineal y a la derecha los datos de la viga de sección constante.

En la figura 6 c, se presenta el diagrama de corte; se ve que los valores son 21.25 T, en el nudo inicial y 18.75 en el centro de luz. Con el uso de las tablas se halló 21.23 T, en el nudo inicial y 18.77 T., en el nudo final.

Finalmente, en la figura 6 d, se muestra el diagrama de momentos, hallados con Sap 2000, sus valores son 21 T m, en nudo inicial y 14.75 T m, en nudo final. Con el uso de tablas se halló 20.92 T m, en nudo inicial y 14.77 T m, en nudo final.



**Figura 6** Análisis con Sap 2000; a) Viga conformada por dos elementos; b) Ingreso de datos de sección de elemento con altura variable a la izquierda y de altura constante a la derecha; c) Diagrama de Corte que reporta Sap 2000; d) Diagrama de Momentos que se halla con Sap 2000.

- **Con programa *EP\_media\_cartela***

En el apartado 4, se indicó el uso del programa *EP\_media\_cartela* con esta acotación a continuación se presenta la entrada de datos y los resultados que arroja el programa.

$$[REP]=EP\_media\_cartela(base,h,H,L,Lv,carga,tipo)$$

$$[REP]=EP\_media\_cartela(0.4,0.6,0.8,5,2,8,0)$$

$$REP = [21.2282; 20.9117; 18.7718; -14.7705]$$

Que son el cortante en nudo inicial, momento en nudo inicial, cortante en nudo final y momento en nudo final.

Las acciones de empotramiento perfecto, halladas con el uso de las tablas 1 a 4, con Sap 2000 y con la función **EP\_media\_cartela** son prácticamente iguales.

## 7. COMENTARIOS Y CONCLUSIONES

Se han obtenido funciones de forma, para encontrar acciones de empotramiento perfecto, ante cualquier tipo de carga, de vigas con cartela a la izquierda o a la derecha, ya que se consideró nudo en la mitad de la viga. Posteriormente se presentaron tablas para encontrar las fuerzas y momentos de empotramiento perfecto, para el caso de carga uniforme distribuida.

Finalmente, se indican nuevas funciones para el sistema de computación **CEINCI-LAB** que sirven para calcular las cargas de empotramiento perfecto en vigas con cartelas ante carga uniforme distribuida y se ha visto su uso mediante el cálculo de un pórtico plano con vigas con cartelas lineales simétricas.

Es una muy buena opción para cuando se tienen grandes luces diseñar la estructura con vigas con cartelas y se aspira con este artículo haber aportado a entender cómo se resuelven estas estructuras ante cargas estáticas y lo más importante que el lector conozca la teoría que conduce al cálculo de las funciones de forma para vigas con cartelas.

## REFERENCIA

1. Aguiar R., (2020), *Análisis Matricial de Estructuras con CEINCI-LAB*, Departamento de Ciencias de la Tierra, Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE, Quinta edición. Volumen 1, 580 p. Sangolquí.
2. Aguiar R., Bonilla A., (2020), "Estructuras con cartelas lineales de hormigón armado y nuevas funciones de **CEINCI-LAB**", *Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras*, Vol. 25, 1, 1-37.
3. Aguiar R., Cagua B., Pilatasig J., (2019,), "Nuevas Funciones del Sistema **CEINCI-LAB** para análisis sísmico espacial", *Revista Internacional de Ingeniería de Estructuras*, Vol. 24, 3, 259-276.
4. Aguiar R., (2008), *Calculo Estructural de Bodegas de FIRMESA ubicadas en Carcelén*, Quito.

5. Bonilla A., (2019) "Funciones de forma para vigas con cartelas lineales", *Segundo Encuentro de Estructuras "Roberto Aguiar Falconí"*, Universidad Laica Eloy Alfaro de Manabí, ULEAM, Manta.
6. Caiza P., (2005) *Cálculo Estructural del Edificio Administrativo de la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE*, Sangolquí.

## ANEXO 1

```

% Ej_REP_Cartelas
clear all; clc
sv=[10.0;12.0]; % luz del vano en metros
sp=[3.6;3.6;3.6]; % altura de cada piso en metros.
nod=18;nr=3;E=2400000;
%% Datos generales
[nv,np,nudt,nudcol,nudvg,nod,nr]=geometria_nudo_viga(sv,sp);
[X,Y]=glinea_portico2(nv,np,sv,sp,nod,nr); %coordenadas
[NI,NJ]=gn_portico2(nr, nv, nudt, nudcol, nudvg);
%% Geometria de la estructura
[L,seno,coseno]=longitud (X,Y,NI,NJ);
for i=1:nr
    RES(i,:)= [i 1 1 1];
end
[CG,ngl]=cg (nod,nr,RES);
%dibujogdl(X,Y,NI,NJ,CG);
%dibujoplano(X,Y,NI,NJ)
[VC]=vc(NI,NJ,CG);
% Contribución de columnas rectangulares
LC=L(1:9);senC=seno(1:9);cosC=coseno(1:9);VCC=VC(1:9,:);
Seccion=[1 0.6 1.2 8 1]; [ELEMVC]=gelem_portico(Seccion); % tiene base y altura
[KC]=krigidez(ngl,ELEMVC,LC,senC,cosC,VCC,E);
% Contribución de vigas con cartelas
b1=0.40;h1=0.70;H1=1.0;LV1=2.0;% Son datos de viga con cartela
SECCION=[b1 h1 H1 LV1];
UBICACION=[1 10 2 4 0; 1 11 2 4 1;
            1 12 2 4 0; 1 13 2 4 1];
[ELEMVC]=gelem_portico_cartela(SECCION,UBICACION);
LVC=L(10:21);senVC=seno(10:21);cosVC=coseno(10:21);VCVC=VC(10:21,:);
[KVC]=krigidez_cartela_nudointermedio(ngl,ELEMVC,LVC,senVC,cosVC,VCVC,E)
KT=KC+KVC;
%% Fuerzas de los elementos
njc=3; F=[4 4 0 0; 7 7 0 0;10 10 0 0];
nmc=12; Fm=[10 3 4 5 2; 11 3 4 5 2];
[REP1]=EP_media_cartela(b1,h1,H1,L(10),LV1,Fm(1,2),0);% Empotramientos
[REP2]=EP_media_cartela(b1,h1,H1,L(11),LV1,Fm(2,2),1);
datosp1=REP1';
datosp2=REP2';
datos=[0 datosp1(1) datosp1(2) 0 datosp1(3) datosp1(4);0 datosp2(1) datosp2(2) 0
datosp2(3) datosp2(4)]
[Q,Q2]=cargas(njc,nmc,ngl,L,seno,coseno,CG,VC,F,Fm,datos)
%% Desplazamientos, giros

```

```
q= KT\Q
%% Fuerzas en columnas
Q2C=Q2(1:9,:);
[FH]=fuerzas(ngl,ELEMC,LC,senC,cosC,VCC,E,q,Q2C)
%% Fuerzas en vigas con cartelas
Q2VC=Q2(10:21,:);
[FC]=fuerzas_cartelas(ngl,ELEMVC,LVC,senVC,cosVC,VCVC,E,q,Q2VC)
```