

## VARIABLES INFLUENCING THE NATURAL FREQUENCY OF RC TWO-WAY SLABS

Gelacio Juárez Luna <sup>(1)</sup>, Omar Caballero Garatachea <sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup> Profesor-Investigador, Departamento de Materiales, Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana, San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Azcapotzalco, CP 02200, México D.F. [gjl@azc.uam.mx](mailto:gjl@azc.uam.mx)

<sup>(2)</sup> Doctor en Ingeniería, Programa de Doctorado en Ingeniería Estructural, Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana, San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Azcapotzalco, CP 02200, México D.F. [caballeroq12@gmail.com](mailto:caballeroq12@gmail.com)

Received: April 2020. Accepted: November 2020. Published: December 2020.

### ABSTRACT

In this paper, a parametric study of the variables influencing the fundamental natural frequency of two-way reinforced concrete slabs is carried out. The studied variables are: support conditions, adjacent panels, elasticity modulus, slab thickness, depth of principal beams, column width and the addition of secondary and tertiary beams. The numerical models were carried out in the structural analysis software SAP2000. The slabs and walls were meshed with shell finite elements, beams and columns were meshed with frame finite elements, in which an isotropic homogeneous material. The susceptibility to vibration problems induced by human walking, which was based on the ranges of frequency recommended in the current design codes. From this parametric study, it was concluded that panels supported on beams are more susceptible to vibration problems than panels supported on walls. The increment of elasticity modulus, slab thickness and the addition of secondary and tertiary beams has minimum influence in the natural frequency. The increments of the depth of principal long beams and the columns width have more influence in the magnitude of the natural frequency of two-way reinforce concrete slabs.

**Keywords:** Reinforced concrete slab; fundamental natural frequency; vibration; human activities.

## VARIABLES QUE INFLUYEN EN LA FRECUENCIA NATURAL DE LOSAS MACIZAS DE CR APOYADAS EN DOS DIRECCIONES

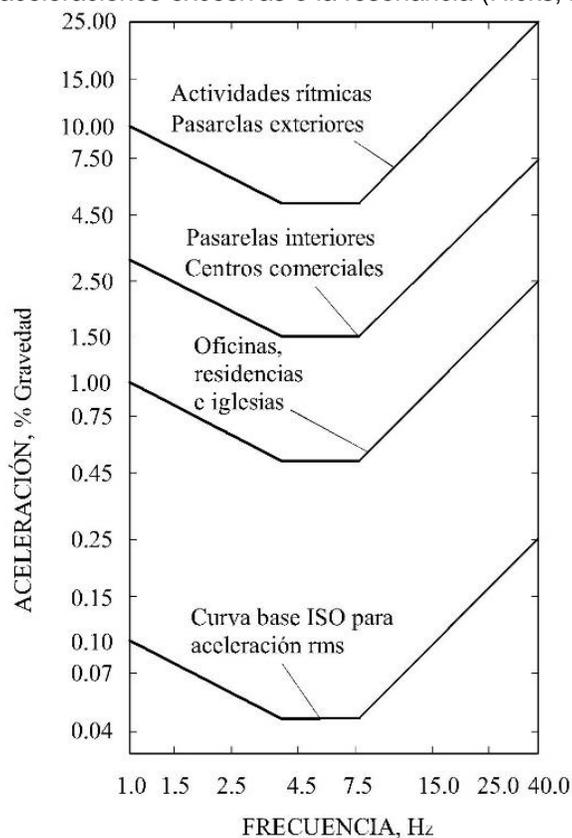
### RESUMEN

En este trabajo se realiza un estudio paramétrico de las variables que influyen en la frecuencia natural fundamental en losas de concreto reforzado en dos direcciones. Las variables que se estudiaron son: las condiciones de apoyo, tableros vecinos, módulo elástico, espesores de losa, peralte de vigas principales, ancho de columnas y la inclusión de vigas secundarias y terciarias. Los modelos numéricos se realizaron en el programa de análisis estructural SAP2000. Las losas y muros se mallaron con elementos finitos tipo lámina, las vigas y las columnas se mallaron con elementos viga-columna, en los que se consideró un comportamiento del material homogéneo e isótropo. Se revisó la susceptibilidad ante vibraciones excesivas debidas al caminar de personas en treinta tableros con base en los intervalos de frecuencia recomendados en la normatividad de diseño vigente. De este estudio paramétrico, se concluyó que los tableros apoyados sobre vigas son más susceptibles a problemas de vibración que los tableros apoyados sobre muros. El incremento del módulo elástico, espesor de la losa y vigas secundarias y terciarias tienen influencia mínima en la frecuencia natural. Los incrementos del peralte de las vigas principales de la longitud larga y del ancho de columnas tienen mayor influencia en la magnitud de la frecuencia natural de losas de concreto en dos direcciones.

**Palabras clave:** Losa de concreto reforzado; frecuencia natural fundamental; vibración; actividades humanas.

## 1 Introducción

Dado que la frecuencia natural,  $f_n$ , es una variable que influye en la vibración de un sistema de piso ante el caminar de personas, en especificaciones como la guía de diseño 11 de AISC (1997) y la guía de diseño HIVOSS (2007) se han proporcionado recomendaciones empíricas y prácticas para el cálculo y control de la  $f_n$  en sistemas de piso de losacero, ya sea vigas compuestas o losas en una dirección, con el fin de no exceder ciertos umbrales de incomodidad. En estas especificaciones se recomiendan valores mínimos de  $f_n$  para evitar vibraciones excesivas. En el AISC (1997) se recomienda que si la  $f_n$  del sistema de piso se encuentra entre 4 y 8 Hz, se tiene mayor perceptibilidad de las personas a las aceleraciones producidas por el caminar de una persona, como se muestra en la Figura 1, donde en este intervalo de frecuencias, los valores de aceleraciones permisibles son menores. En la guía de diseño de la comisión europea HIVOSS (2007) se recomienda tener frecuencias no menores a 9 Hz para evitar vibraciones excesivas debidas al caminar de personas. En las especificaciones de las NTCC-17 (2017) para vibración de sistemas de piso, sólo se recomienda que para  $f_n$  menor de 6 Hz es necesario realizar modelos numéricos para evaluar de la respuesta dinámica ante actividades rítmicas de un conjunto de personas. En esta regulación mediante límites de frecuencia se supone que, si la losa tiene una frecuencia natural suficientemente alta, ésta queda efectivamente fuera del intervalo de frecuencia del componente del primer armónico del caminar, lo que evita aceleraciones excesivas o la resonancia (Hicks, 2004).

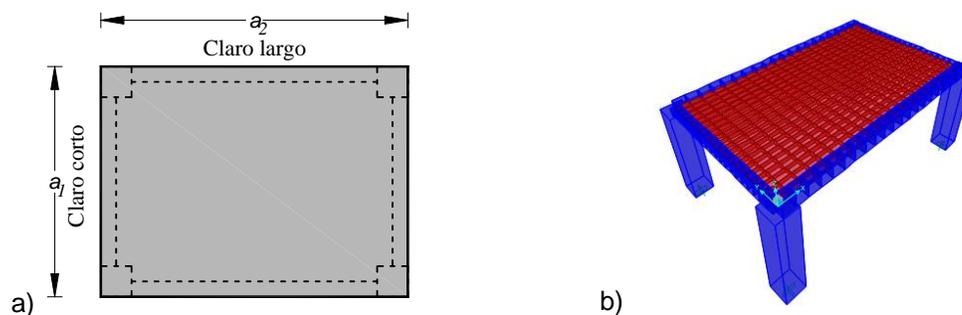


**Figura 1** Nomograma de aceleraciones para el control de vibraciones debido al caminar de personas (adaptado del AISC, 1997)

En otros códigos como el ASCE 7-02 (2002) y EC-3 (2010) se requiere realizar una predicción realista de la respuesta del sistema de piso en servicio sujeto a las actividades actuantes; así como su

evaluación con criterios de aceptabilidad. La vibración de un sistema de piso se regula para garantizar comodidad, y para ello existen nomogramas que establecen límites de aceleración en función de la perceptibilidad de las personas y de acuerdo a un uso requerido. Estos nomogramas requieren dos variables: la  $f_n$  en el eje de las abscisas y la aceleración máxima en el eje de las ordenadas. Existe diversidad de nomogramas, en el caso particular de Norteamérica, el nomograma más utilizado para el análisis ante vibración debido al caminar de una persona en estructuras de acero es el del código AISC (1997), que se basa en los trabajos de Allen y Murray (1993) e ISO (1989).

En este trabajo se fundamenta en tener el sistema de piso fuera del intervalo de frecuencia del caminar humano. Para lo cual se determina la  $f_n$  de treinta tableros aislados rectangulares de CR apoyados sobre vigas, las cuales a su vez se apoyan sobre columnas en sus esquinas. Los tableros tienen longitudes del claro largo,  $a_1$ , y del claro corto,  $a_2$ , como se muestra en la Figura 2a. Estos tableros tienen longitudes  $a_2$  de 4, 5, 6, 7 y 8 m, cuya longitud  $a_1$  se varió, tal que la relación  $m=a_1/a_2$  incrementó desde 0.5 a 1 en incrementos de 0.1. Las columnas son cuadradas de 30 cm para los tableros con claro  $a_2$  de 4 y 5 m y de 50 cm para los tableros con  $a_2$  de 6, 7 y 8 m. El ancho de las vigas es de 25 cm, pero el peralte,  $h$ , así como el espesor del tablero,  $e$ , son variables como de enlistan en la Tabla 1. Se utilizó concreto clase 1 con una resistencia a compresión  $f'c= 300 \text{ kg/cm}^2$ . Es importante mencionar, que los tableros se diseñaron tal que éstos sean flexibles con base a los requerimientos de las NTCE-17 (2017) y NTCC-17 (2017), pues en los elementos estructurales de los tableros la relación entre los desplazamientos resultantes y los permisibles es cercano a la unidad.



**Figura 2** Tablero: a) planta y b) modelo numérico

Los modelos numéricos de los tableros de esta sección y del resto del artículo se realizaron en el programa SAP2000 (CSI-09). Las losas se mallaron con elementos lámina (shell) de cuatro nodos, las vigas y las columnas se mallaron con elementos tipo viga-columna (frame) con dos nodos. En el cálculo de las magnitudes de las  $f_n$  se consideró solamente el peso propio de los elementos estructurales como fuente de masa, teniendo como resultado los datos que se enlistan en la Tabla 2, donde se observa que las magnitudes de la  $f_n$  decrecen cuando un tablero tiende a ser cuadrado y cuando sus claros tienen a ser más grandes. Se consideró la hipótesis de un material homogéneo e isotrópico, una sección bruta en los elementos de concreto y una carga uniformemente distribuida del peso de la losa.

Las magnitudes de las  $f_n$  de cada modelo numérico enlistado en la Tabla 2 se evalúan con los límites establecidos en los códigos HIVOSS (2007) en la Figura 3a, los límites del AISC (1997) como se muestra en la Figura 3b y los límites de las NTCC-17 (2017) como se muestra en la Figura 3c. Se observa que, con las especificaciones HIVOSS (2007), los tableros con longitudes de claro largo,  $a_2$ , de 8 y 7 m son susceptibles a vibración excesiva. En el caso de la evaluación con el código AISC (1997) se observa que los tableros con  $a_2$  de 8 m y parte de las de 7 m presentan susceptibilidad a vibración excesiva. En el caso de la evaluación con las NTCC-17 (2017) no es necesario revisar detalladamente la susceptibilidad de las losas, ya que especifica una frecuencia mínima de 6 Hz. En

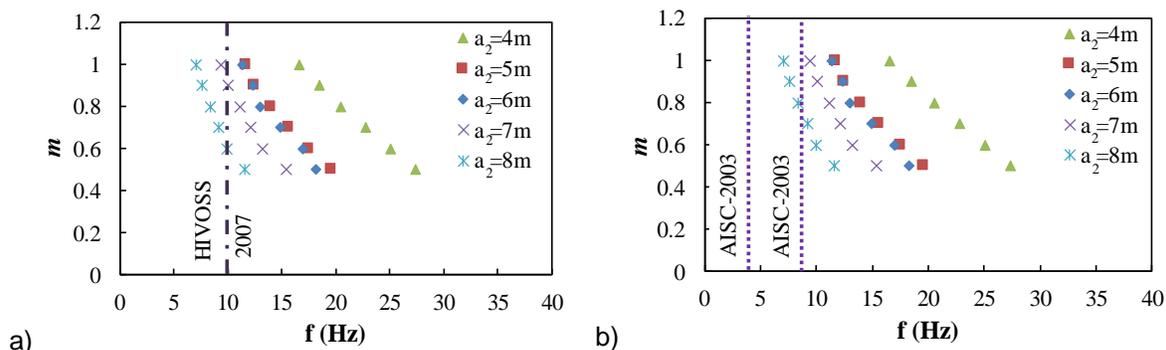
general, como se muestra en las Figuras 3a y 3b para el caso de vibraciones debidas al caminar de personas, la  $f_n$  mínima necesaria para evitar vibraciones excesivas está en un intervalo de 8 a 9 Hz, donde las losas con claros  $a_2$  de 7 y 8m son susceptibles a desarrollar vibraciones excesivas, principalmente para la relación de claros  $m=1.0$ .

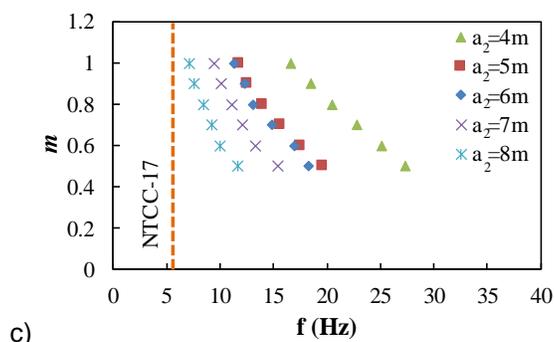
**Tabla 1** Dimensiones de losas y vigas de concreto reforzado

| $m$ | $a_2(\text{cm})$ |              |              |        |              |              |        |              |              |        |              |              |        |              |              |
|-----|------------------|--------------|--------------|--------|--------------|--------------|--------|--------------|--------------|--------|--------------|--------------|--------|--------------|--------------|
|     | 400              |              |              | 500    |              |              | 600    |              |              | 700    |              |              | 800    |              |              |
|     | e (cm)           | h $a_1$ (cm) | h $a_2$ (cm) | e (cm) | h $a_1$ (cm) | h $a_2$ (cm) | e (cm) | h $a_1$ (cm) | h $a_2$ (cm) | e (cm) | h $a_1$ (cm) | h $a_2$ (cm) | e (cm) | h $a_1$ (cm) | h $a_2$ (cm) |
| 0.5 | 8                | 25           | 25           | 8      | 25           | 30           | 10     | 25           | 35           | 10     | 25           | 45           | 11     | 25           | 45           |
| 0.6 | 8                | 25           | 25           | 8      | 25           | 30           | 10     | 25           | 40           | 13     | 25           | 45           | 13     | 25           | 45           |
| 0.7 | 8                | 25           | 25           | 9      | 25           | 30           | 12     | 25           | 40           | 13     | 30           | 50           | 14     | 30           | 50           |
| 0.8 | 8                | 25           | 25           | 10     | 25           | 30           | 13     | 25           | 40           | 15     | 40           | 50           | 15     | 40           | 50           |
| 0.9 | 8                | 25           | 25           | 11     | 25           | 30           | 14     | 35           | 40           | 17     | 40           | 50           | 17     | 40           | 50           |
| 1   | 8                | 25           | 25           | 12     | 30           | 30           | 14     | 40           | 40           | 17     | 50           | 50           | 17     | 50           | 50           |

**Tabla 2** Frecuencia natural de modelos numéricos de tableros de concreto reforzado

| $m$ | Frecuencia natural (Hz) |       |       |       |       |
|-----|-------------------------|-------|-------|-------|-------|
|     | $a_2(\text{cm})$        |       |       |       |       |
|     | 400                     | 500   | 600   | 700   | 800   |
| 0.5 | 27.39                   | 19.57 | 18.23 | 15.41 | 11.62 |
| 0.6 | 25.09                   | 17.53 | 17.01 | 13.26 | 9.97  |
| 0.7 | 22.77                   | 15.60 | 14.90 | 12.10 | 9.20  |
| 0.8 | 20.53                   | 13.95 | 13.04 | 11.16 | 8.40  |
| 0.9 | 18.47                   | 12.50 | 12.37 | 10.09 | 7.60  |
| 1   | 16.61                   | 11.72 | 11.38 | 9.42  | 7.10  |





**Figura 3** Evaluación de la susceptibilidad a vibración de tableros de CR apoyados sobre vigas con base en los códigos: a) HIVOSS (2007), b) AISC (1997) y c) NTCC-17 (2017)

El modificar la frecuencia natural fundamental, incrementarla, podría ser el medio para evitar vibraciones excesivas en los sistemas de piso de CR. En un sistema de piso la  $f_n$  depende de las principalmente de las características geométricas, propiedades mecánicas del material y distribución de elementos estructurales, por lo que es necesario identificar el comportamiento de las variables principales que influyen en ella para controlarla. Por lo que el objetivo de este artículo es el estudio de las variables que influyen en la magnitud de la  $f_n$  en losas de concreto reforzado en dos direcciones para tener un criterio adecuado para su control. En el caso de la influencia de cada una de las variables en el comportamiento de  $f_n$ , se considera sólo el modo fundamental de vibrar, el cual contribuye principalmente en la respuesta dinámica.

En la sección 1 se proporciona una introducción de la vibración en tableros de CR, los criterios que regulan la vibración ante el caminar humano y el objetivo de este estudio. En la sección 2 se evalúa la influencia de los apoyos rígidos y flexibles en la  $f_n$ . En la sección 3 se estudia la influencia de los tableros vecinos en la  $f_n$ . En la sección 4 se evalúa la influencia del módulo elástico en la  $f_n$ . En la sección 5 se evalúa la influencia del espesor de la losa. En la sección 6 se evalúa la influencia del peralte de vigas. En la sección 7 se evalúa la influencia del ancho de columnas. En la sección 8 se evalúa la influencia de vigas secundarias y terciarias. Finalmente, en la sección 9 se proporcionan las conclusiones derivadas de este trabajo.

## 2 Influencia de los apoyos

En algunas ocasiones, por practicidad, la  $f_n$  de los tableros se calcula a partir de soluciones cerradas, las cuales asumen bordes rígidos en sus apoyos, considerando que los giros pueden o no estar restringidos, pero el desplazamiento vertical siempre se considera restringido; sin embargo, algunas veces los tableros están apoyados sobre vigas flexibles, por lo que estas soluciones cerradas no son aplicables. Para evaluar estas condiciones de apoyo, se realizaron los modelos numéricos de dos tableros aislados con claros largos  $a_2$  de 3 y 6 m con espesores de 12 y 14 cm, respectivamente, los cuales se apoyan sobre bordes rígidos y flexibles, como el que se muestran en la Figura 4. Los apoyos rígidos se deben a los muros y vigas de apoyo a lo largo de sus bordes; mientras que los apoyos flexibles se deben a los elementos viga que se deflexionan en función de su rigidez y masa. En estos modelos se varió la longitud del claro corto  $a_1$  para las relaciones  $m$  de 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9 y 1.0, vigas rectangulares de 30 x 25 y 40 x 25 cm para las losas con claros  $a_2$  de 3 y 6 m, respectivamente. En estos modelos, las losas se mallaron con elementos lámina y las vigas con elemento viga-columna, a las que se le asignó las propiedades mecánicas de concreto clase 1 (NTCC-17, 2017) con una resistencia a compresión del concreto de 300 kg/cm<sup>2</sup>. Además, se evaluó la solución cerrada de Bares (1971) para los tableros sobre apoyos rígidos.

En la Figura 5 se muestra la variación de la  $f_n$  contra la relación  $m$  de los tableros apoyados en bordes rígidos y flexibles, donde se observa que, en general, las magnitudes de la  $f_n$  de tableros sobre bordes rígidos es mayor que de la bordes flexibles. La solución cerrada obtenida con Bares (1971) es idéntica a la obtenida con los modelos numéricos sobre muros. La diferencia de la  $f_n$  de tableros en bordes rígidos respecto a los que se apoyan en bordes flexibles es de hasta del 280% para  $m=0.5$  y del 160% para  $m=1.0$ . Lo cual muestra una influencia importante que tiene las condiciones de apoyo en la  $f_n$  fundamental de sistemas de piso de concreto reforzado. Mostrando así que la solución cerrada para calcular la  $f_n$  de losas sobre bordes rígidos no es aplicable para losas sobre bordes flexibles, pues se sobrestima su magnitud. Además, se demuestra que los tableros que son más susceptibles a tener problemas de vibración son aquellos que se encuentran apoyados sobre vigas, que aquellos apoyados sobre muros.

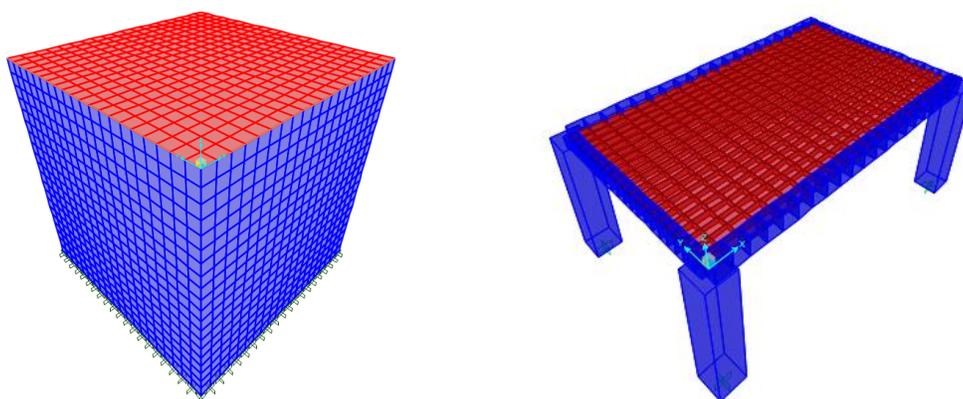


Figura 4 Modelos de losas con apoyos: a) rígidos y b) flexibles

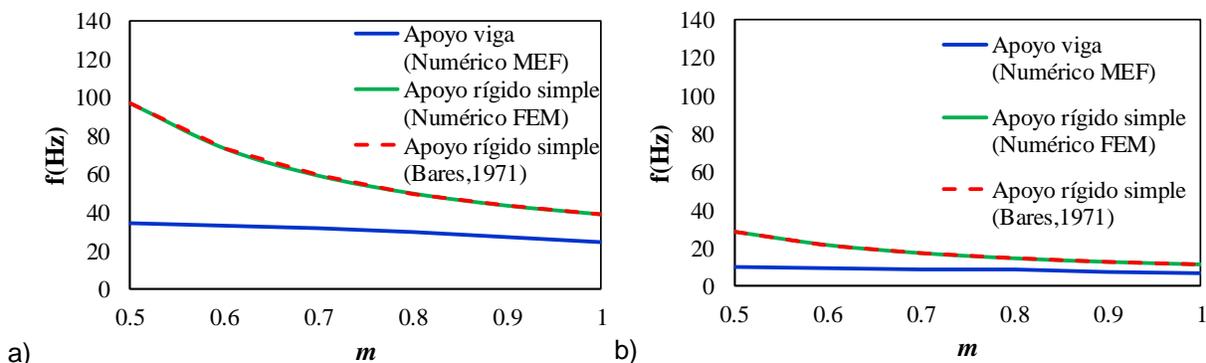
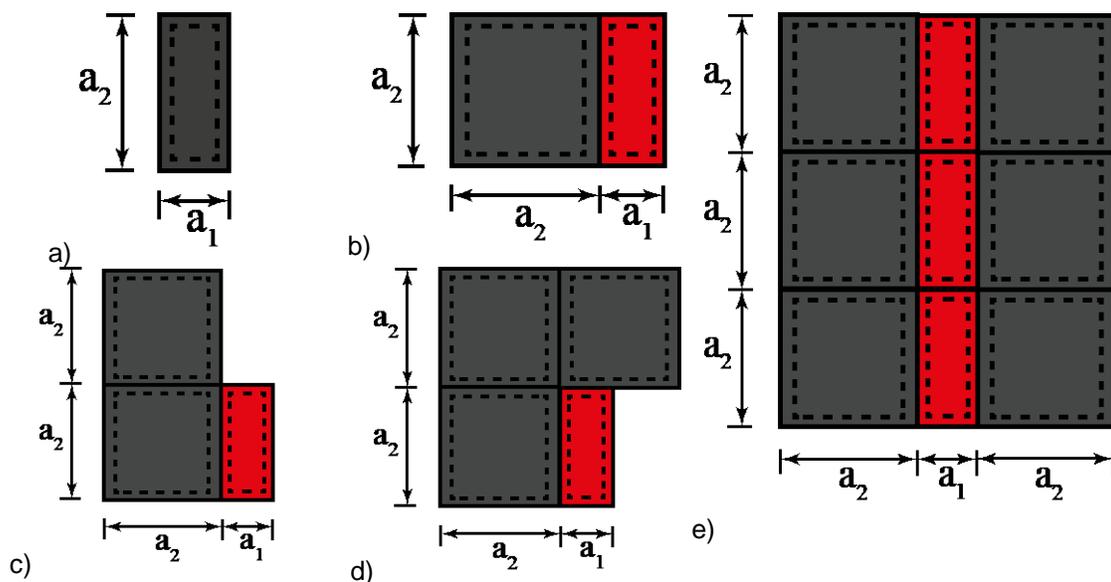


Figura 5 Comparación de la  $f_n$  en losas aisladas con apoyos rígidos simples y viga con  $a_2$ : a) 3 m y b) 6m

### 3 Influencia de tableros vecinos en la $f_n$

Generalmente, algunas recomendaciones como las propuestas por Bares (1971), Blevins (1979) y la mayoría de las soluciones analíticas para el cálculo de la  $f_n$  en sistemas de piso se proporcionan para tableros aislados. Sin embargo, la mayoría de los sistemas de piso que se encuentran en las edificaciones se conforma de varios tableros que, al ser colados monolíticamente, se comportan como un sistema continuo. Con el fin de estudiar el comportamiento en la  $f_n$  de sistemas de piso conformados de múltiples tableros, se estudian cuatro configuraciones geométricas de losas con apoyos rígidos y apoyos flexibles, donde primeramente se analizó un tablero aislado con una longitud de lado corto de  $a_1=a_2/5$ , la cual se incrementó  $\Delta a_1= a_2/5$  hasta obtener una losa cuadrada,  $a_1=a_2$ .

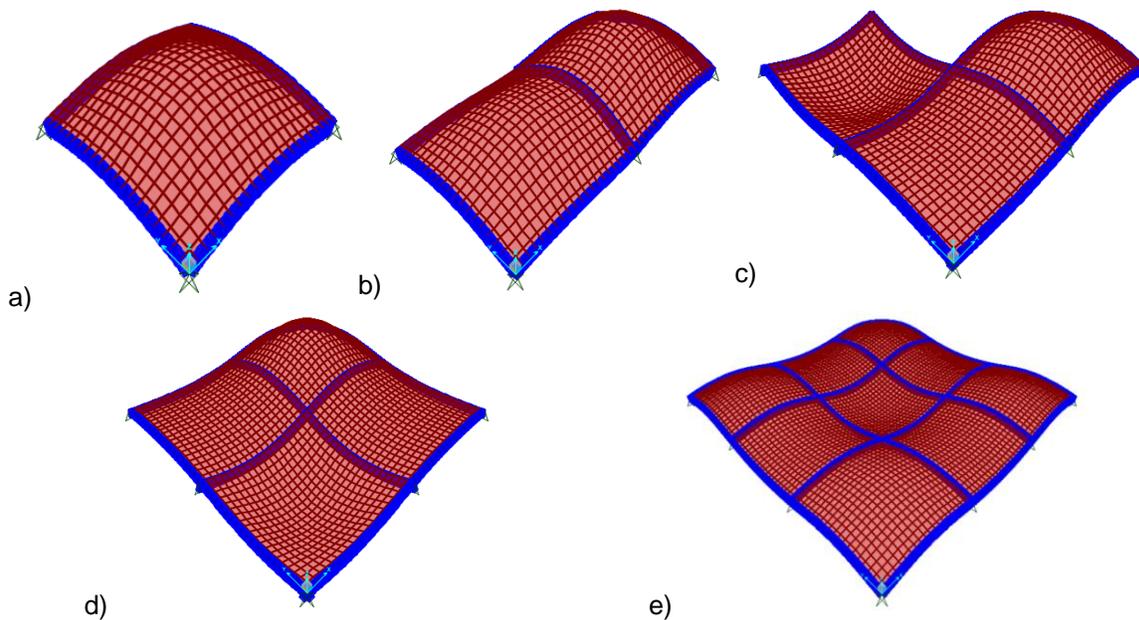
Posteriormente, se estudiaron losas con 2, 3, 4 y 9 tableros a los que la longitud  $a_1$  de uno de sus tableros se incrementó hasta tenerlos completamente cuadrados, como se muestran en la Figura 6.



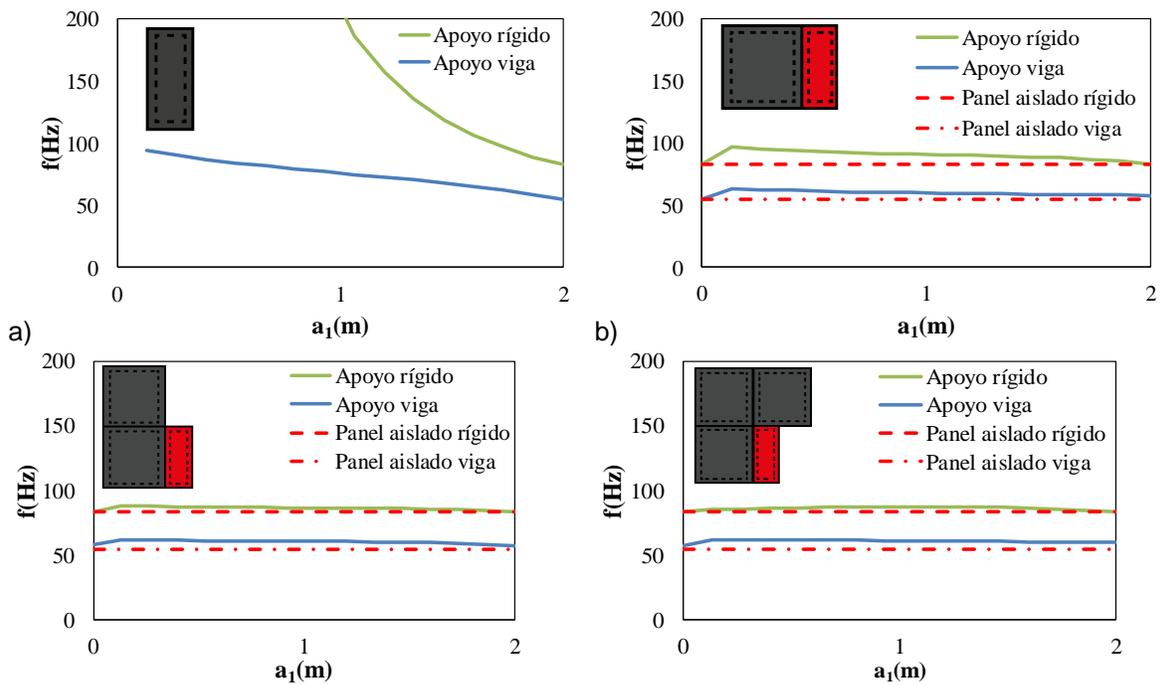
**Figura 6** Configuración de losas con tableros: a) uno, b) dos, c) tres, d) cuatro y e) nueve

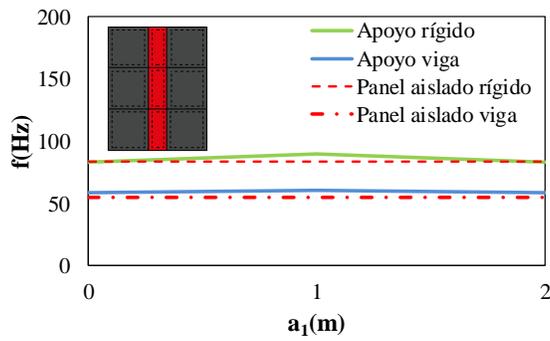
Con el fin de conocer la variación de la magnitud de la  $f_n$  en losas de concreto reforzado como los que se muestran en la Figura 6, se realizaron los modelos numéricos de losas con apoyos rígidos y apoyos flexibles. Las vigas son rectangulares de 30x20cm y el espesor de la losa es de 12 cm. El concreto utilizado es clase 1 con resistencia a compresión de 250 kg/cm<sup>2</sup>. El análisis de la  $f_n$  se realizó para losas con apoyos rígidos en todo su borde; mientras que, en las losas apoyadas sobre vigas se colocó un apoyo simple en cada esquina, el cual permite la rotación. Los modelos numéricos de las losas, cuando  $a_1=a_2$ , se muestran en la Figura 7, a los que se les asignó un material homogéneo, elástico e isótropo.

En las Figuras 8 a 10 se muestra la variación de la magnitud de la  $f_n$  al incrementar la longitud  $a_1$  en las losas mostradas en la Figura 6 con longitudes  $a_2$  de 2, 3 y 4 m respectivamente, hasta que éstas son completamente cuadradas. En la losa con un solo tablero, la magnitud de  $f_n$  decrementa cuando  $a_1$  incrementa, hasta que la losa es cuadrada. Por otra parte, cuando se tienen losas con 2, 3, 4 y 9 tableros, la magnitud de  $f_n$  incrementa hasta un 16, 6, 8 y 11%, respectivamente. Sin embargo, ésta decrementa hasta que se tiene la misma magnitud de  $f_n$  de la losa aislada cuadrada, considerando que las dimensiones de las vigas de apoyo son iguales en todo el perímetro para el caso de las losas con apoyo flexible. Consecuentemente, se concluye que la influencia en la magnitud de la  $f_n$  al tener otros tableros vecinos es mínima, como se observa al comparar con la solución de un panel aislado cuadrado, representado por las líneas horizontales punteadas en las Figuras 8 a 10. En general, la magnitud de  $f_n$  es mayor cuando los tableros están sobre apoyos rígidos, que cuando están apoyadas sobre apoyos flexibles.

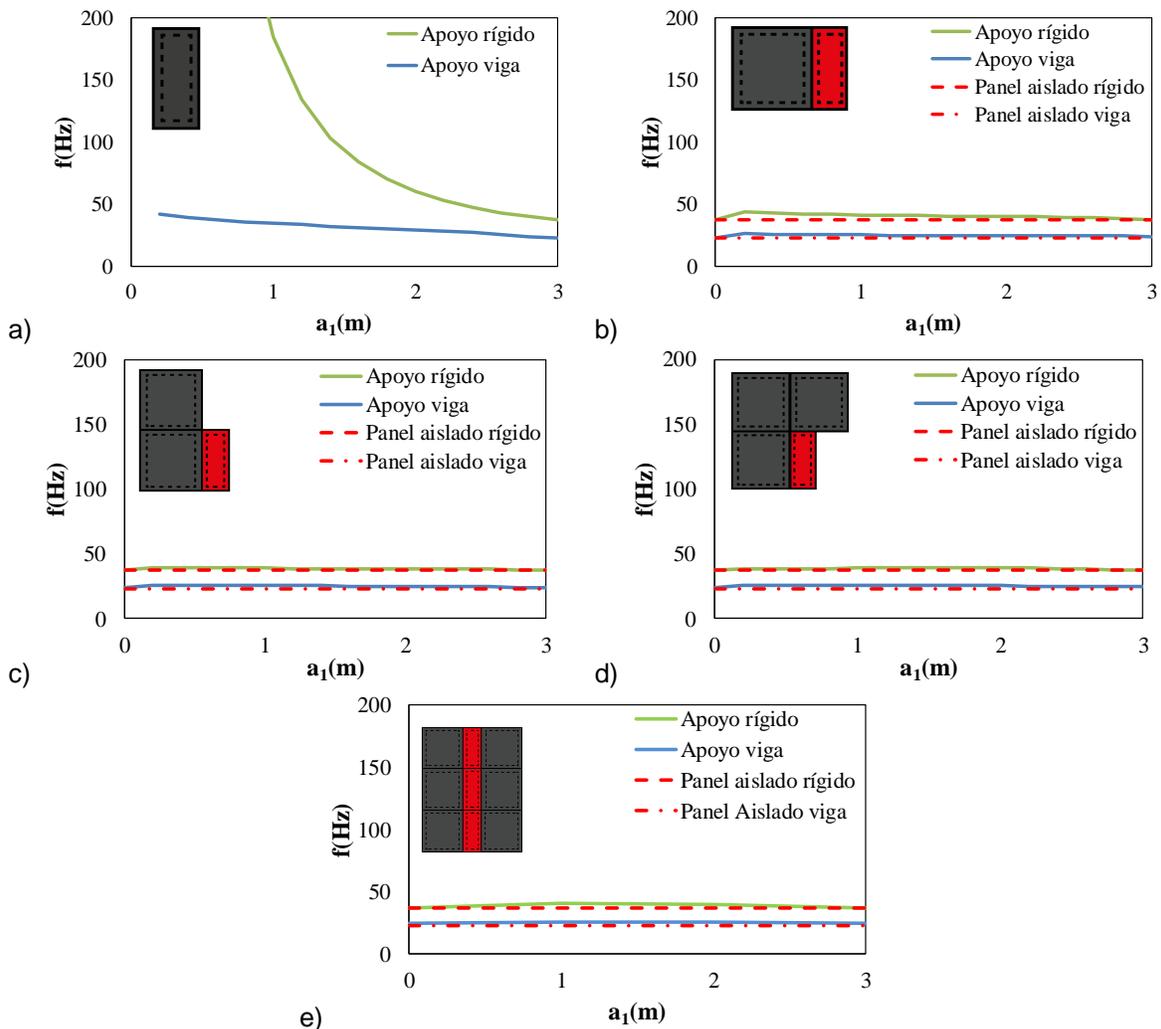


**Figura 7** Modo fundamental de los modelos numéricos de losas apoyadas sobre vigas con tableros: a) uno, b) dos, c) tres, d) cuatro y e) nueve

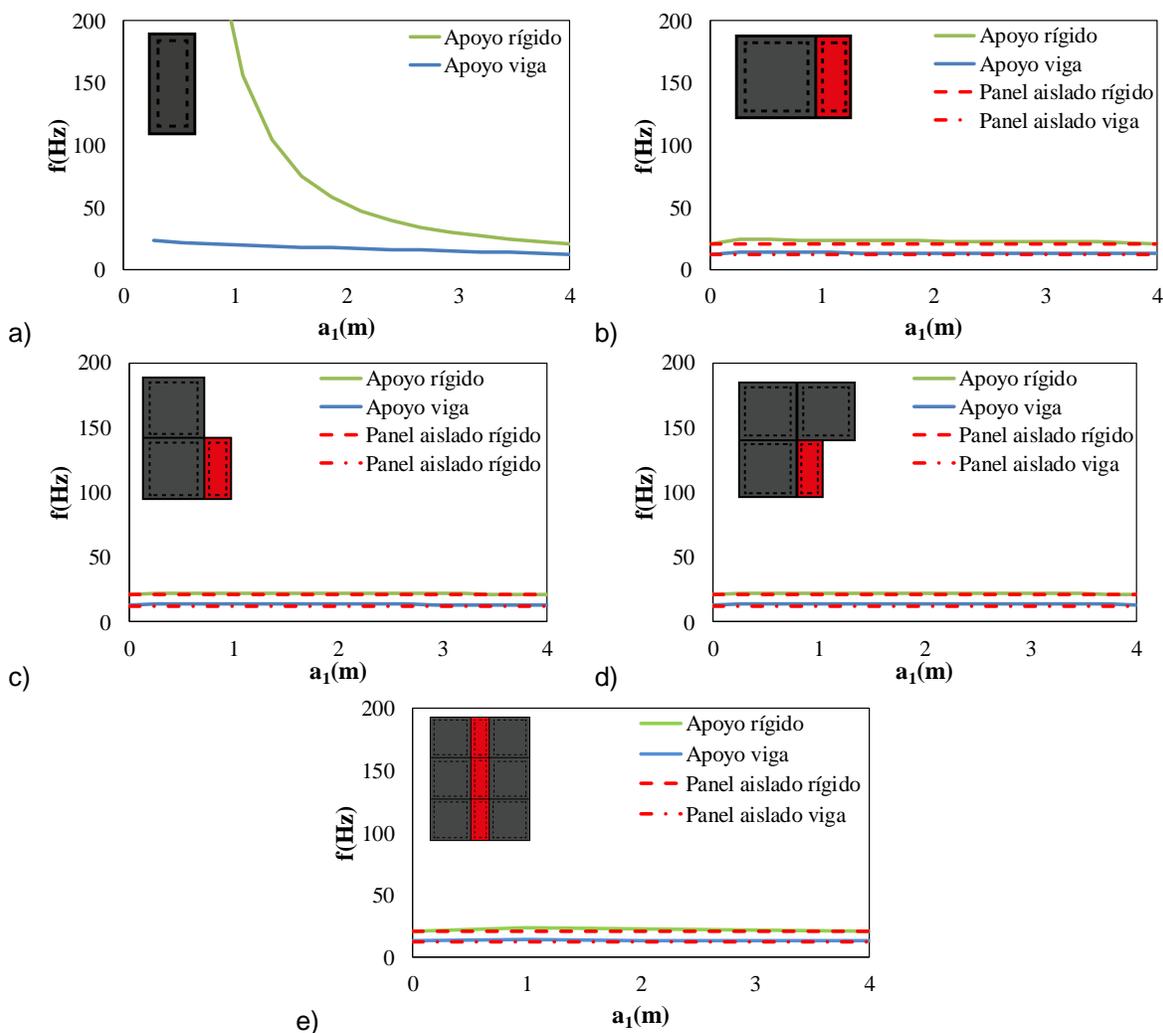




**Figura 8** Variación de la  $f_n$  contra  $a_1$  en losas de  $a_2 = 2m$  con número de paneles: a) 1, b) 2, c) 3, d) 4 y e) 9



**Figura 9** Variación de la  $f_n$  contra  $a_1$  en losas de  $a_2 = 3m$  con número de paneles: a) 1, b) 2 c) 3 y d) 4 y e) 9



**Figura 10** Variación de la  $f_n$  contra  $a_1$  en losas de  $a_2=4\text{m}$  con número de paneles: a) 1, b) 2 c) 3, d) 4 y e) 9

Puesto que la influencia de los tableros vecinos en la  $f_n$  es mínima, en la mayoría de los tableros que se estudian a continuación son aislados sobre apoyos flexibles. En estos modelos se consideró solamente el peso propio de los elementos estructurales como fuente de masa, donde las  $f_n$  son mayores en tableros rectangulares,  $m=0.5$ . Estas frecuencias decrecen hasta aproximadamente un 40% cuando los tableros son cuadrados,  $m=1.0$ . Es importante mencionar que se tienen losas de 7 y 8 m con  $f_n$  menores a 10 Hz, las cuales son más susceptibles a vibración con base en HIVOSS (2007); sin embargo, para las NTCC-17 (2017), estas losas no serían susceptibles de vibración, pues tiene sólo considera como críticas aquellas cuya  $f_n$  son menores a 6 Hz.

#### 4 Influencia del módulo elástico

Para conocer la influencia del módulo elástico en la  $f_n$ , se estudiaron tableros cuadrados con claro de 4, 5, 6, 7 y 8 m a los cuales se les asignó las propiedades mecánicas de un concreto clase 1 (NTCC-17, 2017) con distintas resistencias a compresión del concreto: 300, 350 y 400  $\text{kg}/\text{cm}^2$ . Se utilizaron sólo los tableros cuadrados, pues son los que tienen  $f_n$  menores, lo que los hace más

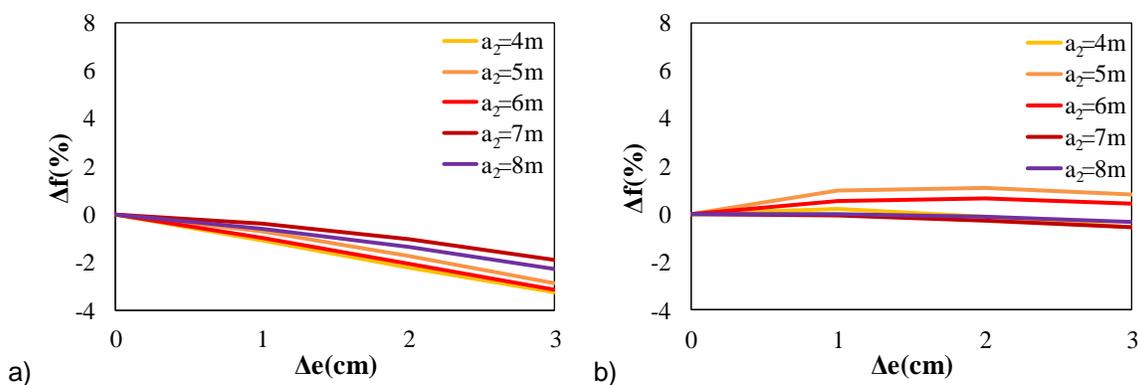
susceptibles a vibración. En la Tabla 3 se muestra que al variar la resistencia a compresión del concreto en incrementos de  $\Delta f'_c=50 \text{ kg/cm}^2$ , la magnitud de  $f_n$  sólo incrementa de 3.5 a 4%. Lo cual muestra que existe una influencia mínima del cambio de las propiedades mecánicas del concreto, por lo que se demuestra la poca viabilidad de esta opción para modificar el valor de  $f_n$  de manera considerable.

**Tabla 3** Variación de la  $f_n$  ante distintas resistencias de concreto

| f'c (kg/cm <sup>2</sup> ) | E (kg/cm <sup>2</sup> ) | a <sub>2</sub> (cm) |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |
|---------------------------|-------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
|                           |                         | 400                 |                     | 500                 |                     | 600                 |                     | 700                 |                     | 800                 |                     |
|                           |                         | f <sub>n</sub> (Hz) | Δf <sub>n</sub> (%) |
| 300                       | 242,487                 | 16.61               | 0                   | 11.72               | 0                   | 11.38               | 0                   | 9.42                | 0                   | 7.10                | 0                   |
| 350                       | 261,916                 | 17.35               | 4                   | 12.19               | 4                   | 11.98               | 4                   | 9.83                | 4                   | 7.32                | 4                   |
| 400                       | 280,000                 | 17.85               | 7                   | 12.60               | 7                   | 12.39               | 7                   | 10.17               | 7                   | 7.57                | 7                   |

### 5 Influencia del espesor de losa

Para estudiar la influencia del espesor de la losa en la magnitud de la  $f_n$ , los diseños mostrados en la Tabla 1, así como sus correspondientes modelos numéricos, se modifican mediante el peralte de la losa con incrementos de  $\Delta e=1 \text{ cm}$  hasta llegar a un incremento de 3 cm. El porcentaje de la  $f_n$  normalizado al diseño inicial se muestra en la Figura 11, donde se observa que para relaciones  $m$  de 0.5 existe una disminución de la  $f_n$  al aumentar el peralte de la losa con valores menores del 4%. Por otra parte, para las relaciones mayores de  $m$ , se observa que el aumento del peralte de la losa incrementa la  $f_n$  con valores hasta del 4%, excepto en la losa con  $a_2=4m$  que muestra incrementos de hasta el 8%, además se observa que no existe una relación lineal entre espesor y la frecuencia. Por lo anterior, se concluye que el incrementar el espesor de la losa, no es una opción para modificar la  $f_n$  de manera considerable. De acuerdo a la normatividad vigente, las losas son perceptibles si tienen una frecuencia entre 0 y 10 Hz, por lo que, si se tiene una losa con una  $f_n$  dentro de este intervalo crítico, el incrementar el espesor hasta 3 cm modificaría su frecuencia hasta 1 Hz, lo cual mantiene la losa dentro de un valor crítico de perceptibilidad.



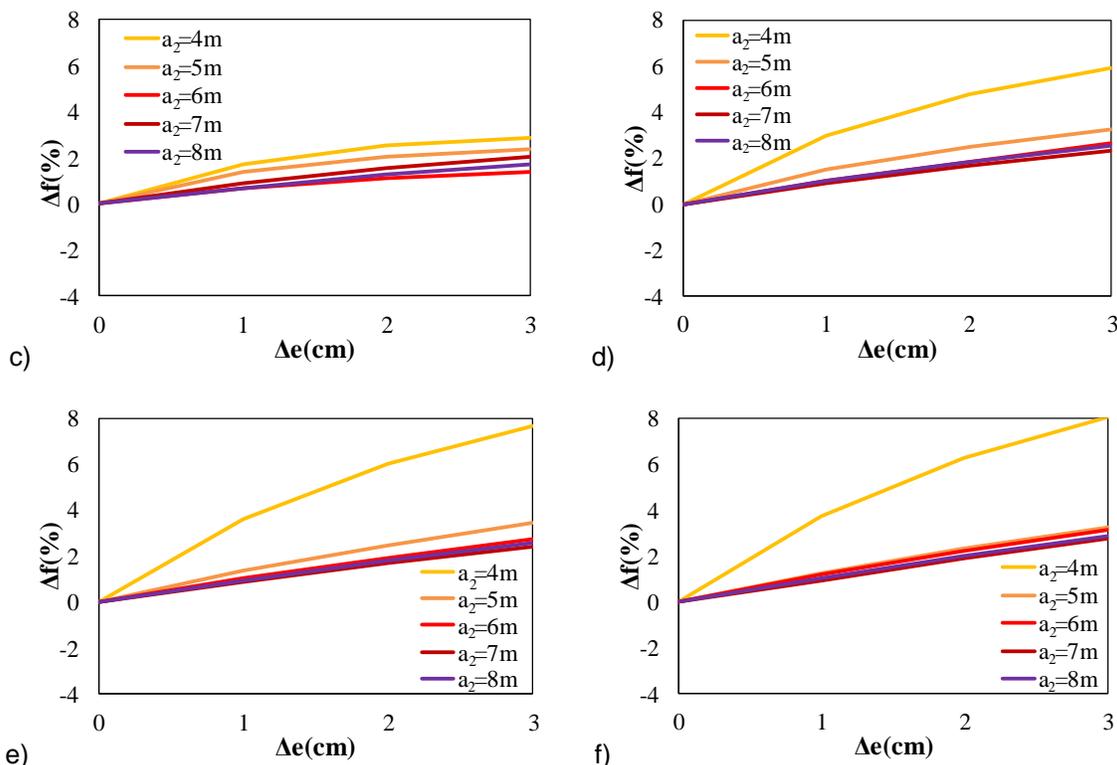


Figura 11 Variación de la  $f_n$  contra el incremento del espesor de tableros apoyados sobre vigas con relaciones  $m$ : a) 0.5, b) 0.6, c) 0.7, d) 0.8, e) 0.9 y f) 1.0

### 6 Influencia del peralte de vigas

En el caso de la influencia del peralte de vigas en la  $f_n$  en losas de concreto reforzado, se realizó el análisis para tableros aislados y continuos, como parte de una losa. Esto es con el objetivo de evaluar la factibilidad de analizar un tablero que forma parte de un sistema continuo como un tablero aislado, ya que con traveses de propiedades similares en sus cuatro bordes no existe influencia de un tablero sobre los demás, como se muestra en las Figuras 8 a 10. Se tiene la hipótesis de que al tener traveses con distinta sección transversal esta condición es distinta. Por lo tanto, en el primer caso, el modelado numérico es como se muestra en la Figura 4b; mientras que en el segundo caso, el tablero en estudio se analiza como parte de un conjunto de tableros como se muestra en la Figura 12.

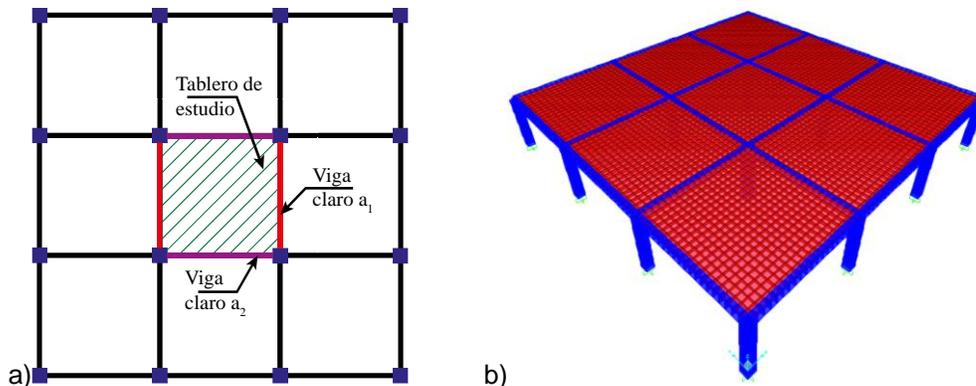
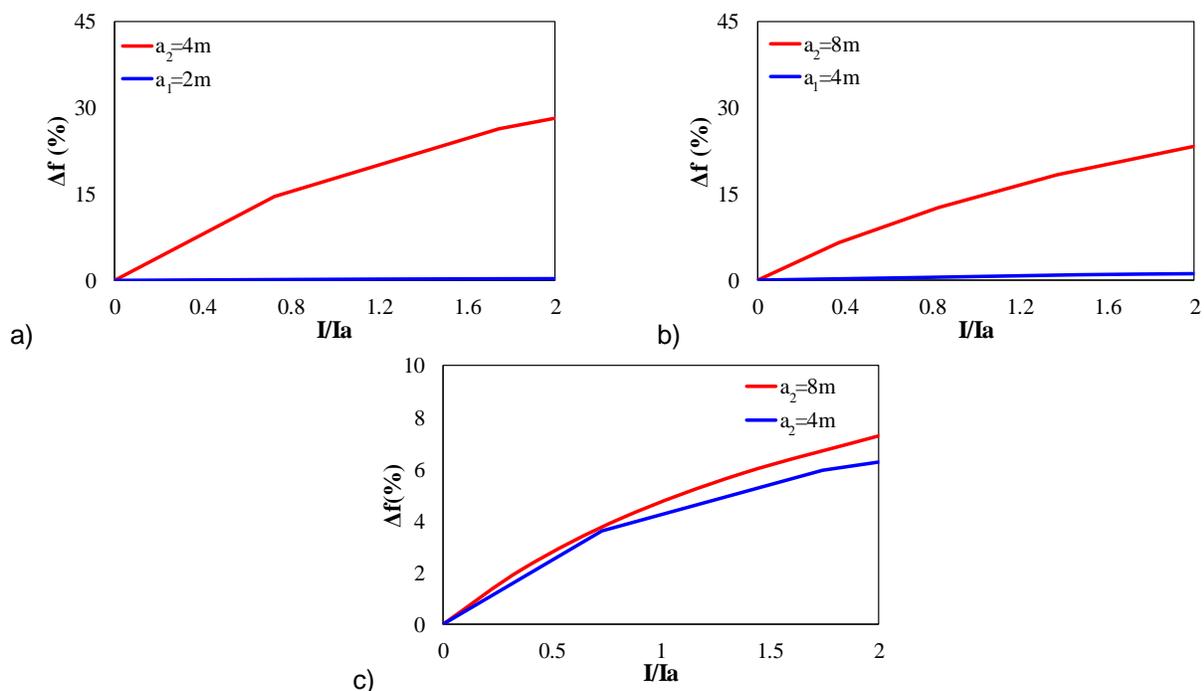


Figura 12 Tablero que forma parte de una losa continua: a) planta y b) vista 3D

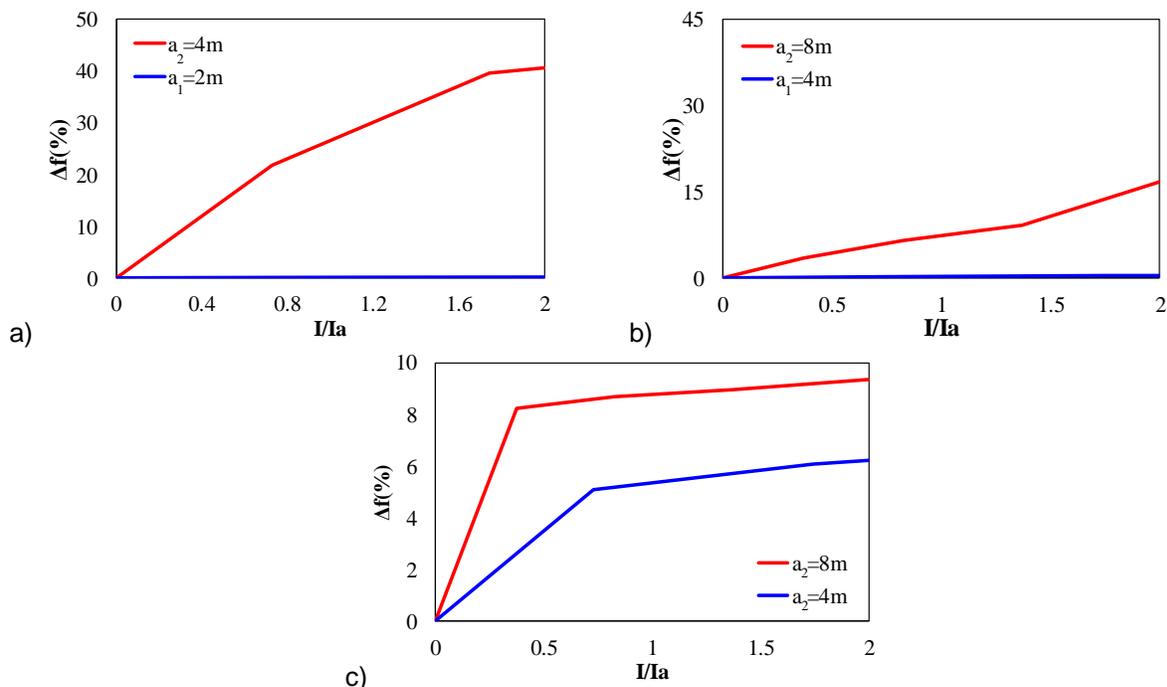
Para los dos tipos de tableros se analizó la variación de la  $f_n$  incrementando el peralte de vigas  $\Delta h=5, 10$  y  $15$  cm y, consecuentemente el momento de inercia, cuyo valor inicial o de diseño es  $I_a$ . Se estudiaron tableros rectangulares y cuadrados con relación  $m=0.5$  y  $m=1$ , respectivamente; en ambos casos, se analizaron tableros con las longitudes del claro  $a_2$  de 4 y 8 m. En los tableros rectangulares se incrementó independientemente el peralte de las vigas paralelas en las direcciones del claro  $a_2$  y las del claro  $a_1$ . El criptograma de identificación de los tableros es  $Ti-j-ii \times jj$ , donde  $i$  es el índice que indica la geometría del tablero: rectangular,  $i=R$ , y cuadrado,  $i=C$ ;  $j$  indica si el tablero es aislado,  $j=A$ , y continuo,  $j=C$ ;  $ii$  es la longitud del lado conto y  $jj$  la longitud del claro largo.

En el caso de los tableros aislados, en la Figura 13 se muestran los incrementos del porcentaje normalizados a la frecuencia inicial del diseño. En los tableros rectangulares, el incremento del peralte de las vigas del claro largo,  $a_2$ , se tienen incrementos de la magnitud de la  $f_n$  hasta 40% en el tablero rectangular de  $2 \times 4$  m y del 20% en el tablero rectangular de  $4 \times 8$  m. Por otra parte, al incrementar el peralte de las vigas del claro corto,  $a_1$ , se tiene sólo un incremento de hasta el 2%. Para los tableros cuadrados aislados, se tiene incremento de la  $f_n$  de hasta el 6% al incrementar el peralte de las vigas en cualquier dirección. Esto muestra que incrementar el momento de inercia en vigas paralelas al claro largo  $a_2$  es más efectivo conforme disminuye el valor de la relación  $m$ ; caso contrario de las vigas paralelas a la dirección  $a_1$ , donde su influencia incrementa al aumentar  $m$ .

A los tableros continuos mostrados en la Figura 12 también se les modificó la inercia de vigas. En tableros rectangulares, al incrementar la inercia de las vigas largas, se tienen cambios de la  $f_n$  de hasta el 17%; mientras que, al incrementar la inercia de las vigas cortas se tiene un incremento de la  $f_n$  menor del 1%, como se muestra en la Figura 14. Por otra parte, para las losas cuadradas se tienen cambios de la  $f_n$  de hasta el 5%, variando el momento de inercia en cualquier dirección. En general, la variación de la  $f_n$  de un tablero de losa se puede obtener de manera aislada con una aproximación suficiente ante los cambios del momento de inercia como los que se muestran en este apartado. Por otra parte, se muestra que la relación entre momento de inercia y frecuencia no es completamente lineal.



**Figura 13** Variación de la  $f_n$  contra el incremento del momento de Inercia de vigas en los tableros aislados siguientes: a) TR-A-2x4, b) TR-A-4x8 y c) TC-A-4x4 y TC-A-8x8



**Figura 14** Variación de la  $f_n$  contra el incremento del momento de Inercia de vigas en los tableros continuos siguientes: a) TR-C-2x4, b) TR-C-4x8 y c) TC-C-4x4 y TC-C-8x8

### 7 Influencia del ancho de columnas

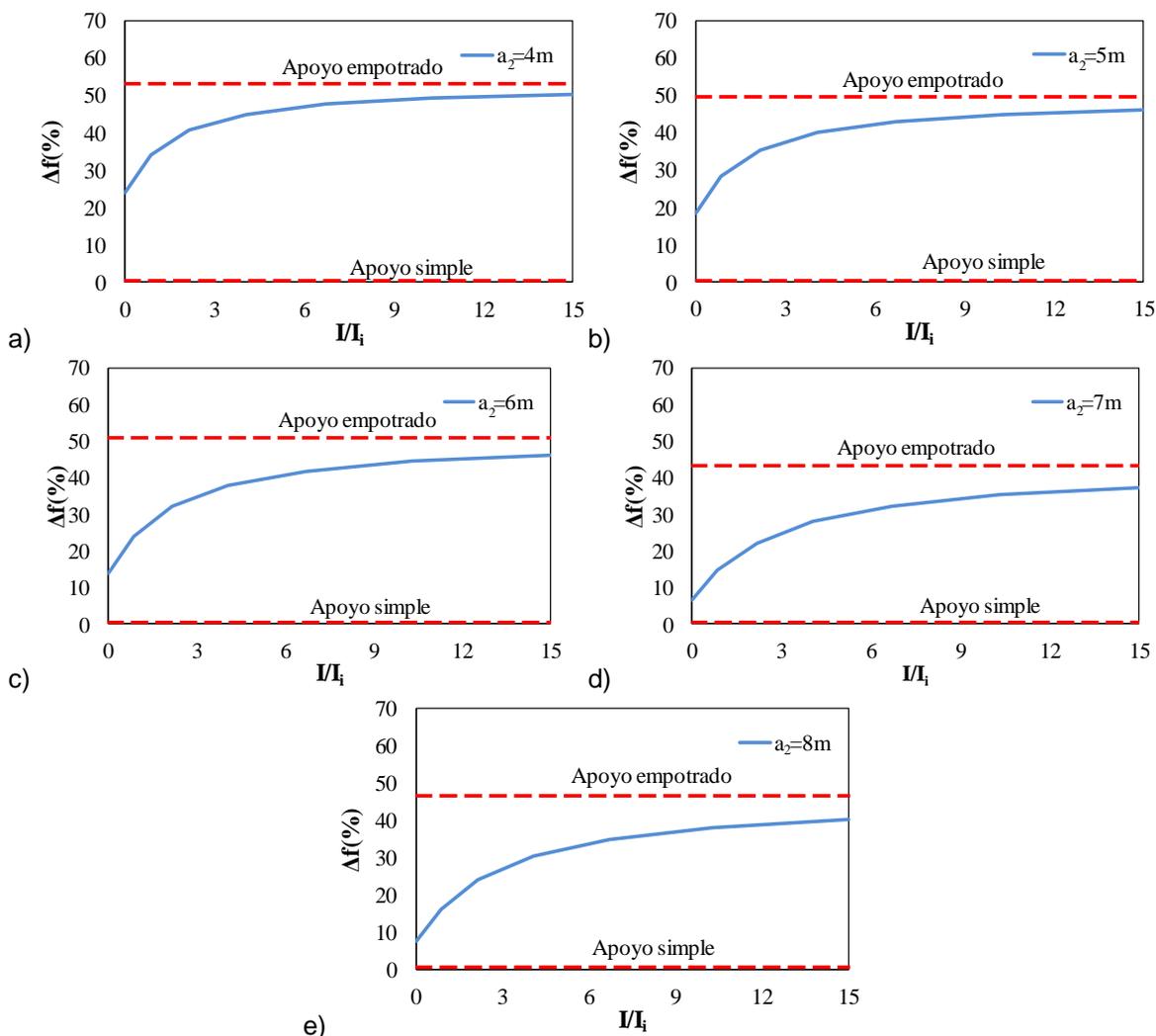
En los modelos estudiados de las secciones anteriores, las columnas que soportan losas y vigas de concreto reforzado tienen una sección transversal cuadrada de 30x30 cm, cuyo ancho satisface lo establecido en los requerimientos de dimensión mínima para marcos de ductilidad alta (NTCC-17, 2017). Para el estudio de la influencia del ancho de las columnas en la  $f_n$ , éste se aumentó en ambas direcciones, en incrementos de  $\Delta h=5cm$  hasta tener una sección cuadrada de 60x60 cm por lado como se muestra en la Figura 15.



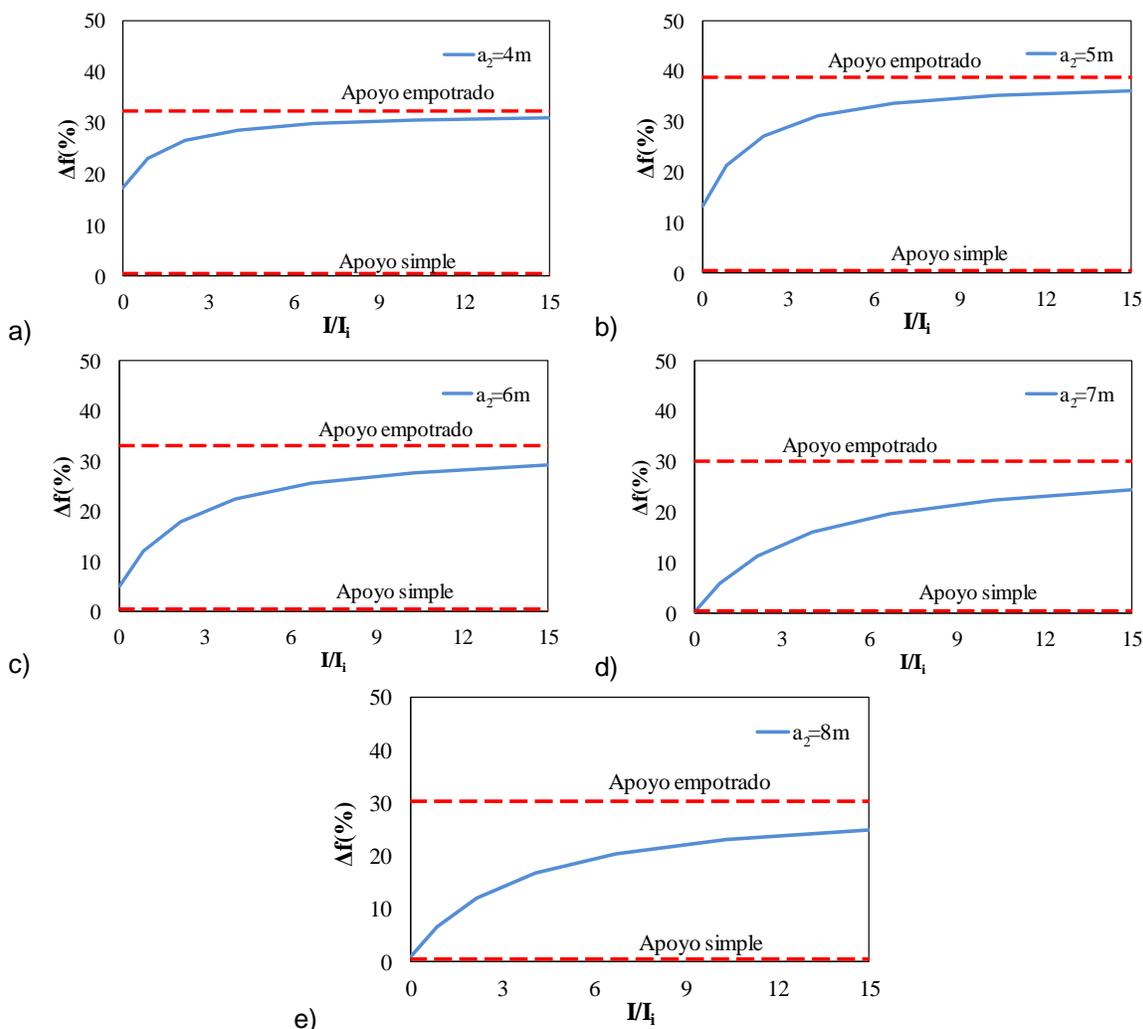
**Figura 15** Columnas de concreto reforzado: a) incremento inicial de ancho de columna y b) columna con ancho final

En las Figuras 16 y 17 se muestra el incremento en porcentaje normalizado a la frecuencia del diseño con apoyos rígidos simples en las esquinas para tableros cuadrados, donde al incrementar el momento de inercia normalizado al correspondiente de una columna con ancho inicial de 30 cm. Se observa una tendencia significativa a la solución con apoyos empotrados al tener una sección incrementada al 100%, principalmente en el tablero con claro  $a_2=4m$ , lo cual muestra que la influencia de las columnas en la  $f_n$  es considerable. Posteriormente, se analizan las relaciones  $m$  de 0.5 y 1.0 para cada losa, donde existe un incremento inicial de la frecuencia natural en las losas con  $a_2$  de 4,

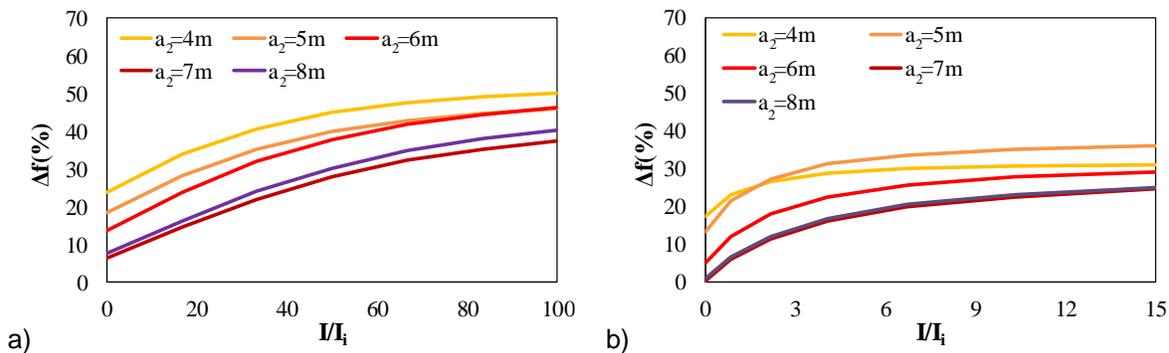
5, 6 y 7 m menor del 25, 20, 15 y 5%, respectivamente. Este comportamiento se muestra principalmente en los tableros rectangulares con relaciones  $m$  de 0.5; mientras que en los tableros cuadrados,  $m=1.0$ , estos porcentajes tienen incrementos menores del 20, 15, 10 y 5%, como se muestra en la Figura 17. Por otra parte, se observa que al tener un incremento del ancho de aproximadamente del 90%, el comportamiento de la  $f_n$  tiende a ser constante, como se muestra en la Figura 18, por lo que es posible utilizar apoyos empotrados en las esquinas para el análisis. De manera general, se deduce que las columnas representan una influencia importante en la  $f_n$  de un tablero, principalmente cuando la relación  $m$  tiende a disminuir. El incremento de la  $f_n$  al incrementar el área de la sección transversal de las columnas, se atribuye al incremento de la rigidez axial de las columnas,  $EA/L$ , que tiene relación directa con el área. Por lo anterior, aunque se modelen tableros aislados para su estudio, es recomendable modelar sus columnas, pues el valor de la  $f_n$  podría variar hasta un 50%.



**Figura 16** Variación de las  $f_n$  contra el incremento del momento de Inercia de columnas en los tableros rectangulares aislados siguientes: a) TR-A-2x4, b) TR- A -2.5x5, c) TR-A-3x6, d) TR-A-3.5x7 y e) TR-A-4x8



**Figura 17** Variación de las frecuencias contra el incremento del momento de Inercia de columnas en los tableros cuadrados aislados siguientes: a) TC-A-4x4, b) TC-A-5x5, c) TC-A-6x6, d) TC-A-7x7 y e) TR-A-8x8



**Figura 18** Variación de las frecuencias contra el incremento del momento de Inercia de columnas en los tableros aislados: a) rectangulares  $m=0.5$  y b) cuadrados  $m=1.0$

### 8 Influencia de vigas secundarias y terciarias

La  $f_n$  en losas de CR depende de su distribución de masa y rigidez sobre el área total. Sin embargo, en ciertos casos existen vigas secundarias, las cuales pueden cambiar las propiedades dinámicas del sistema de piso. Debido a esto, se estudia la influencia de vigas secundarias en la  $f_n$ , donde se analiza un tablero de concreto rectangular y un cuadrado con claros de 4x8 m y 8x8m, respectivamente, como se muestra en la Figura 19, cuyas propiedades se muestran en las Tablas 1 y 2. Las vigas secundarias y terciarias se colocaron como se muestra en las Figuras 20 y 21. Las vigas secundarias son paralelas al lado corto en la losa rectangular. Las vigas principales en ambos tableros tienen una sección transversal de 25x50cm (T1). Las vigas secundarias y terciarias del tablero cuadrado tienen la misma sección transversal que las vigas principales, T1. En el caso del tablero rectangular tanto las vigas del claro  $a_1$  como las vigas secundarias y terciarias tienen una sección transversal de 25x25 cm.

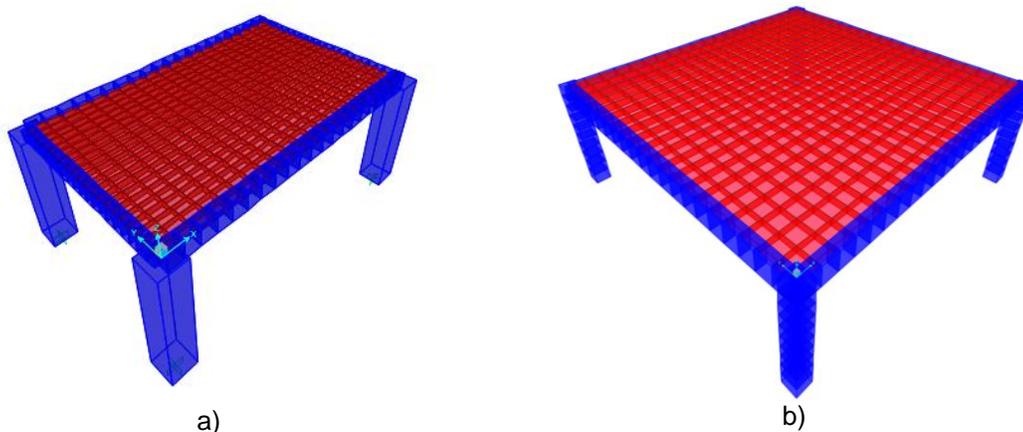


Figura 19 Modelos de tableros de concreto reforzado: a) TR-A-4x8 y b) TC-A-8x8

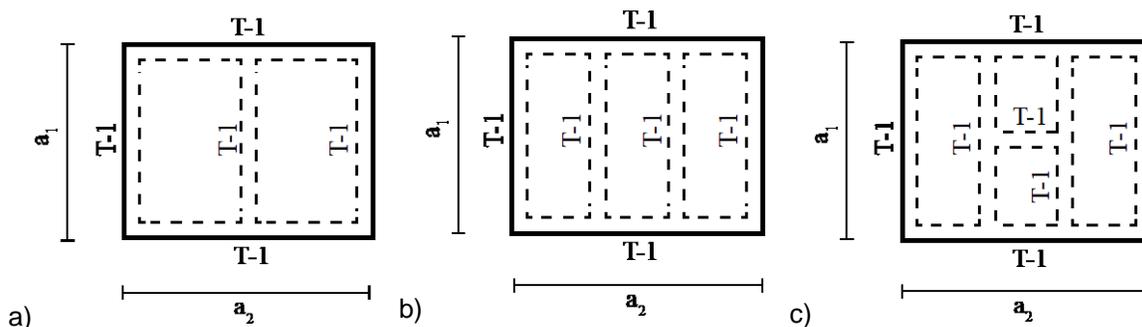


Figura 20 Tableros con vigas secundarias al: a) centro del claro, b) tercios del claro y c) tercios del claro con viga terciaria

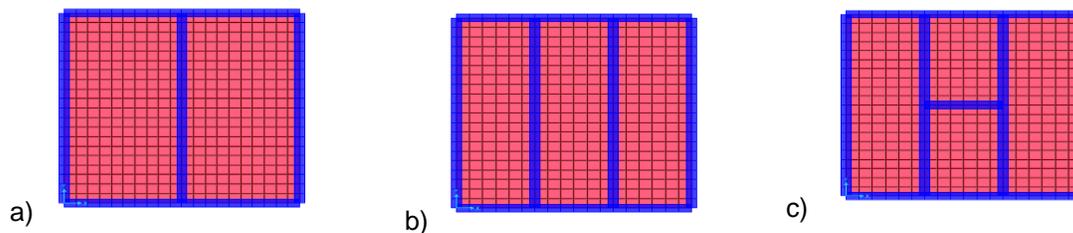


Figura 21 Modelos numéricos de tableros con vigas secundarias al: a) centro del claro, b) tercios del claro y c) tercios del claro con viga terciaria

La variación de las magnitudes de la  $f_n$  al incluir las vigas secundarias se muestran en la Tabla 4. En el caso del tablero rectangular, existe una reducción de la  $f_n$  al incluir las vigas secundarias, principalmente cuando se incluye la viga terciaria, lo cual implica que la influencia de su masa es mayor que la de su rigidez. Por otra parte, en el caso del tablero cuadrado existe un aumento de la  $f_n$  al incluir las vigas secundarias entre el 4 y 6%; cuando se incluye la viga terciaria, existe otro aumento de  $f_n$ ; sin embargo, este cambio es mínimo, lo cual implica que la viga terciaria no influye en la energía cinética desarrollada en la losa y las vigas secundarias. En resumen, la variación de la  $f_n$  en una losa con vigas secundarias y terciarias es mínima, además, los tableros derivados de ellas no se pueden analizar como aislados.

**Tabla 4** Variación de la  $f_n$  con vigas secundarias y terciarias

| $a_1/a_2$ | Variación de la frecuencia natural $\Delta f_n$ (%) |                   |                |
|-----------|---|-------------------|----------------|
|           | Mitad del claro                                     | Tercios del claro | Viga terciaria |
| 0.5       | -0.60   | -0.34             | -3.01          |
| 1         | 4.65  | 6.06              | 6.48           |

## 9 Conclusiones

En este artículo se realizó un estudio paramétrico de las variables que influyen en la  $f_n$  para losas de concreto reforzado. En el caso de la evaluación de criterios de perceptibilidad no existe un valor mínimo completamente definido de  $f_n$  para evitar vibraciones excesivas, pero se busca que la magnitud de la  $f_n$  esté lo suficientemente alejada de la frecuencia de actividades humanas.

Los tableros que se apoyan sobre vigas tienen magnitudes de la  $f_n$  que son más susceptibles a la vibración que los tableros que se apoyan sobre apoyos rígidos, por lo que se deben revisar ante vibraciones producidas por actividades humanas.

Calcular la  $f_n$  de tableros apoyados sobre bordes flexibles con soluciones cerradas de tableros apoyados sobre bordes rígidos sobrestima la magnitud hasta un 40%. Las soluciones cerradas de tableros sobre apoyos rígidos son válidas para tableros que se apoyan sobre muros.

La influencia de los tableros vecinos en la  $f_n$  es menor, pues aunque su magnitud se incrementa un poco cuando algunos tableros tiene una dimensión menor a los circundantes, ésta disminuye para tener la misma que la de un tablero aislado.

La influencia del módulo elástico y del espesor de la losa es mínimo en la magnitud de la  $f_n$ , por lo que no son opciones para modificar considerablemente la magnitud de la  $f_n$ .

El incrementar el momento de inercia en vigas paralelas al claro largo es más efectivo conforme disminuye el valor de la relación  $m$ , pues se tiene un incremento de la  $f_n$  de hasta un 45%. Aunque también se tiene un incremento de la  $f_n$  al incrementar las vigas cortas, pero éste es de hasta un 8%.

Aunque no es una opción viable o común para controlar la vibración en los sistemas de losas, el incrementar la inercia de las columnas, puede incrementar hasta un 50% la  $f_n$  de los tableros,

La variación de la  $f_n$  en una losa al incluir vigas secundarias y terciarias es mínima, por lo que la variación de la forma modal fundamental es mínima, cuyo máximo se desarrolla en el centro del claro, por lo que los tableros derivados de estas configuraciones de vigas no se pueden analizar como aislados.

En trabajos futuros se evaluará cómo influyen estas variables en la aceleración producida ante actividades rítmicas.

## Agradecimientos

Los autores agradecen el apoyo de la Universidad Autónoma Metropolitana. El segundo autor agradece al CONACYT la beca otorgada para sus estudios de Doctorado.

## REFERENCIAS

1. AISC (1997), *Steel Design Guide 11, Floor vibrations due to human activity*. American Institute of Steel Construction, Chicago, Estados Unidos.
2. ASCE 7-02 (2002). *Minimum design loads for buildings and other structures*. American Society for Civil Engineers, Virginia. Estados Unidos.
3. Allen, D.E. y Murray, T.M. (1993), "Design criterion for vibrations due to walking", *Engineering Journal, AISC*, 30 (4), 117-129.
4. Bares, R. (1971), *Tables for the analysis of plates, slabs and diaphragms based on the elastic theory*. Bauverlag GmbH, Wiesbaden und Berlin.
5. Blevins, R.D. (1979), *Formulas for natural frequency and mode shape*. Primera Edición, Van Nostrand Reinhold Company, Nueva York.
6. CSI-09 (2009), *Analysis reference manual for SAP2000*. Computers & Structures, Berkley.
7. EC-3. (2010) *Eurocode 3. Design of steel structures: Parte 1.1: General rules and rules for buildings*. European Convention for Constructional Steelwork. Eurocode Design Manuals. Portugal.
8. HIVOSS (2007), "Human induced vibration of steel structures", *Research Fund for Coal & Steel*, European Commission, 1-19.
9. Hicks S. (2004), "Vibration characteristics of steel-concrete composite floor systems", *Progress in Structural Engineering and Materials*, 6, 21-38. <https://doi.org/10.1002/pse.163>
10. ISO (1989), *ISO 2631-2, Mechanical vibration and shock: Evaluation of human exposure to whole-body vibration-part 2: human exposure to continuous and shock-induced vibrations in buildings (1 to 80 Hz)*. International Organisation for Standardisation. Genova.
11. NTCC-17 (2017), *Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal*. Gaceta Oficial del Distrito Federal. México.
12. NTCE-17 (2017), *Criterios y Acciones para el Diseño Estructural de las edificaciones del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal*. Gaceta Oficial del Distrito Federal. México.