

# **ASSESSMENT OF THE CRACK BAND WIDTH LENGTHS IN THE MODELLING OF CRACKING IN CONCRETE WITH CONTINUUM DAMAGE MODELS**

**Eduardo Echeverria-Medina<sup>(1)</sup>, Gelacio Juárez-Luna<sup>(2)</sup>**

<sup>(1)</sup> Estudiante Maestría, Departamento de Materiales, Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana, San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Azcapotzalco, CP 02200, México D.F. [eduardo@azc.uam.mx](mailto:eduardo@azc.uam.mx)

<sup>(2)</sup> Profesor-Investigador, Departamento de Materiales, Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana, San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Azcapotzalco, CP 02200, México D.F. [gil@azc.uam.mx](mailto:gil@azc.uam.mx)

Received: Agosto 2021. Accepted: May 2022. Published: June 2022

## **ABSTRACT**

Three criteria to estimate the crack bandwidth in fracture analyses using continuum damage models are evaluated. The approach developed by Juárez et al. (2021) for closed form solutions was implemented in the finite element method. Four cases were studied, from which the load-displacement curves of the fracture process were obtained. In these examples, the dissipated fracture energy was congruent with the magnitude expected in all the cases studied. Some drawbacks like mesh dependence and elastic energy locking occurred when using empirical formulas to compute the crack bandwidth. From the results, recommendations are given to compute crack bandwidths.

**Keywords:** Crack bandwidth; damage model; fracture energy; softening; finite element.

## **EVALUACIÓN DEL TAMAÑO DEL ANCHO BANDA DE AGRIETAMIENTO EN EL MODELADO DEL DAÑO EN EL CONCRETO CON MODELOS DE DAÑO CONTINUO**

### **RESUMEN**

Se evalúan tres criterios para determinar el tamaño de la banda de agrietamiento en análisis de fractura empleando modelos de daño continuo. La propuesta desarrollada por Juárez *et al.* (2021) para soluciones cerradas se implementó en el método de los elementos finitos. Se realizaron cuatro casos de estudio, de los que se obtuvieron las curvas carga-desplazamiento durante el proceso de fractura. En estos ejemplos, la energía liberada durante el proceso de fractura es congruente con la magnitud esperada. Limitantes como la dependencia del mallado y el atoramiento de la energía elástica se presentaron al utilizar métodos empíricos para calcular el ancho de la banda de agrietamiento. A partir del análisis de los resultados se proporcionan recomendaciones para emplear anchos de banda de agrietamiento.

**Palabras clave:** Ancho de banda de agrietamiento; modelo de daño; energía de fractura; ablandamiento; elementos finitos.

## 1 Introducción

El modelado del comportamiento del concreto durante el proceso de fractura mediante el método de los elementos finitos es un tema que ha tenido importantes avances en las últimas décadas, pero que aún presenta retos por superar. Esto se debe principalmente a la dificultad que ha representado capturar el fenómeno conocido como ablandamiento, que consiste en la pérdida progresiva de la resistencia residual del material, mientras éste se continúa deformando. El estudio del ablandamiento es fundamental para predecir el comportamiento de estructuras cargadas excesivamente. Una de las herramientas más utilizadas para el análisis de elementos que son llevados hasta la fractura total es el artificio matemático conocido como “banda de agrietamiento”, introducida por Bazant y Oh (1983). Esencialmente es una manera de adaptar el modelo discreto de la grieta ficticia introducido por Hillerborg *et al.* (1976), el cual es físicamente más realista pero más difícil de modelar que una formulación continua.

Un parámetro clave de la banda de agrietamiento es su tamaño o ancho,  $h$ , ya que a través de éste la energía de fractura por unidad de área,  $G_F$ , considerado una propiedad de material, se relaciona con la energía de fractura por unidad de volumen,  $g_F$ , asegurando así que la energía se disipe objetivamente, independientemente del refinamiento del mallado. Es por esto que la banda de agrietamiento se considera un método de regularización.

La gran ventaja de asociar el proceso de fractura a una banda con tamaño definido en lugar de a una grieta que genera discontinuidad, es que es posible adoptar modelos constitutivos de la mecánica del medio continuo y, por lo tanto, realizar análisis de forma sencilla mediante el método de los elementos finitos. En particular, en este artículo se utilizó el modelo de daño isotrópico desarrollado por Juárez Luna *et al.* (2014), implementado en el programa FEAP (Taylor, 2008).

La determinación del tamaño de la banda, sin embargo, no ha sido una solución directa, sobre todo en mallados pocos regulares o que no se encuentran alineados con el agrietamiento. Diferentes autores han propuesto metodologías, ecuaciones y recomendaciones partiendo de distintas aproximaciones. Sin embargo, Jirásek (2011) encontró posibles fuentes de error en las más utilizadas.

Recientemente, Juárez *et al.* (2021) desarrolló una propuesta para determinar el tamaño de la banda de agrietamiento, a partir del análisis cinemático y energético de un elemento con daño distribuido. Este ancho de banda de agrietamiento fue propuesto para la solución cerrada de una barra con ablandamiento en tensión; sin embargo, esta banda de agrietamiento podría funcionar en la solución de problemas de materiales cuasi-frágiles con el método de los elementos finitos. Por lo que el presente trabajo tiene como objetivo evaluar el ancho de banda de agrietamiento de Juárez *et al.* (2021) y otras aproximaciones frecuentemente implementadas en programas comerciales de elementos finitos.

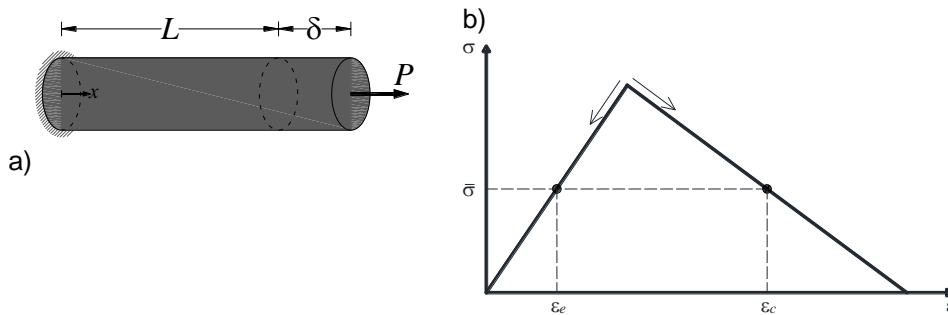
En la sección 2 se explica el concepto de banda de agrietamiento y su respectivo tamaño, y se exponen las distintas aproximaciones que se han propuesto en la literatura. En la sección 3 se introduce el modelo de daño continuo isotrópico utilizado en los ejemplos y la forma en que la banda de agrietamiento se asocia a éste. En la sección 4 se presentan los modelos estudiados y se realiza un análisis de los resultados obtenidos. Finalmente, en la sección 5 se enlistan conclusiones

con base en el trabajo realizado y se proponen recomendaciones para el análisis de fractura de elementos de concreto.

## 2 Anchos de banda de agrietamiento

### 2.1 Dependencia del mallado en el modelado del ablandamiento

Sea una barra recta de largo  $L$  y sección transversal  $A$  sujeta a tensión uniaxial, como se ilustra en la Figura 2.1a. Se considera un comportamiento elástico lineal inicial hasta que se alcanza un esfuerzo último a tensión,  $\sigma_t$  asociado a la deformación  $\varepsilon_t$ . La respectiva carga última a tensión se denota como  $f_t$ . Considerando que las propiedades del material y dimensiones de la sección no son perfectamente uniformes en todo el espécimen, el daño se desarrollará en algunas partes, mientras que el resto del elemento permanecerá en el intervalo elástico. Es por esto que, al continuar con la aplicación de carga, el ablandamiento no ocurre en toda la barra: una parte se descarga por la rama elástica. Asumiendo que el ablandamiento es lineal, el diagrama esfuerzo-deformación *durante el ablandamiento* se muestra en la Figura 2.1b.



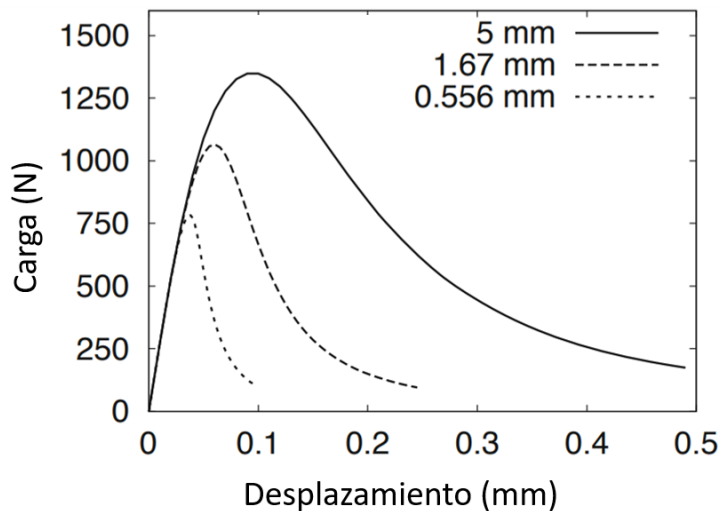
**Figura 2.1.** Barra sujeta a tensión: a) geometría y b) diagrama esfuerzo-deformación durante el ablandamiento.

La ecuación de equilibrio implica que el esfuerzo medio,  $\sigma$ , permanece uniforme a lo largo de la barra; así como una deformación media,  $\varepsilon$ . Sin embargo, considerando las imperfecciones previamente mencionadas, a lo largo de la barra se tienen dos deformaciones asociadas al mismo esfuerzo: una deformación elástica del material que se descarga,  $\varepsilon_e$ , y una por ablandamiento del material en la zona de concentración de deformaciones, donde el material se está fracturando,  $\varepsilon_c$ . A partir de este análisis, se concluye que la extensión de la zona de ablandamiento en el diagrama esfuerzo-deformación depende del tamaño de la región con resistencia mínima. Éste, físicamente, puede ser arbitrariamente pequeño. En un análisis de elementos finitos, esta arbitrariedad se traduce en que la respuesta del espécimen depende completamente del tamaño de los elementos finitos, como se demuestra a continuación.

Continuando con el ejemplo de la barra, ésta se divide en  $N_e$  elementos finitos unidimensionales con función de interpolación lineal y se analiza con la formulación estándar deformación-ablandamiento continuo. Si se asume que la zona más débil

está en el centro, el elemento finito que se localice ahí presentará ablandamiento. Denotando como  $L_s$  la longitud acumulada de las partes con ablandamiento del espécimen, se tendrá  $L_s = L/N_e$ , por lo que, como se había anticipado, la rama de ablandamiento depende fuertemente del mallado. Conforme  $N_e \rightarrow \infty$ ,  $L_s \rightarrow 0$ , y tanto la energía disipada como la deformación por ablandamiento tienden a cero. Este comportamiento es físicamente inaceptable y contrario a lo que ha demostrado la experimentación. Esta dependencia del mallado también se describe por Bazant y Planas (1998) y Jirásek (2011).

En modelos bidimensionales, la sensibilidad de los resultados al mallado utilizado también ocurre. Como ejemplo se presenta el caso de una viga con muesca al centro sujeta a flexión, estudiada por Jirásek (2011), utilizando un modelo de daño isotrópico. Esta viga fue ensayada en laboratorio por Kormeling y Reinhardt (1983). Utilizando elementos de 5 mm en la parte central, que es donde se espera que se concentren las deformaciones, y, ajustando los parámetros del modelo de daño, Jirásek obtuvo una respuesta satisfactoriamente similar a la experimental. Sin embargo, manteniendo fijos los parámetros del modelo de daño, pero utilizando tamaños del elemento más pequeños (1.67 mm y 0.556 mm), tanto la carga pico como la energía disipada (área bajo la curva del diagrama) se redujeron considerablemente. Las curvas carga-desplazamiento obtenidas se muestran en la Figura 2.2.



**Figura 2.2.** Respuesta de la viga a flexión con parámetros fijos y distintos tamaños de elemento finito. Tomado de Jirásek (2011).

## 2.2 Módulo de ablandamiento ajustado al mallado (banda de agrietamiento)

El modelo de la banda de agrietamiento consiste en resolver el modelo de la grieta cohesiva, en el cual se asume que el desplazamiento es discontinuo, mediante una formulación continua. Esta aproximación resulta atractiva porque el modelo de la grieta cohesiva es objetivo, independiente del mallado, como se demostrará a continuación.

Considere nuevamente la barra en tensión uniaxial dividida en  $N_e$  elementos finitos, de los cuales únicamente uno presenta ablandamiento posterior a la carga pico. El

ablandamiento ocurre debido a una grieta ficticia dentro del elemento finito, cuya evolución está dada por una relación esfuerzo-desplazamiento. El desplazamiento total que se desarrolla en el elemento finito fracturado es:

$$u = u_e + u_c \quad (1)$$

En esta expresión,  $u_e$  es el desplazamiento desarrollado durante el comportamiento elástico y  $u_c$  es el desplazamiento desarrollado durante el proceso de fractura. La deformación elástica es:

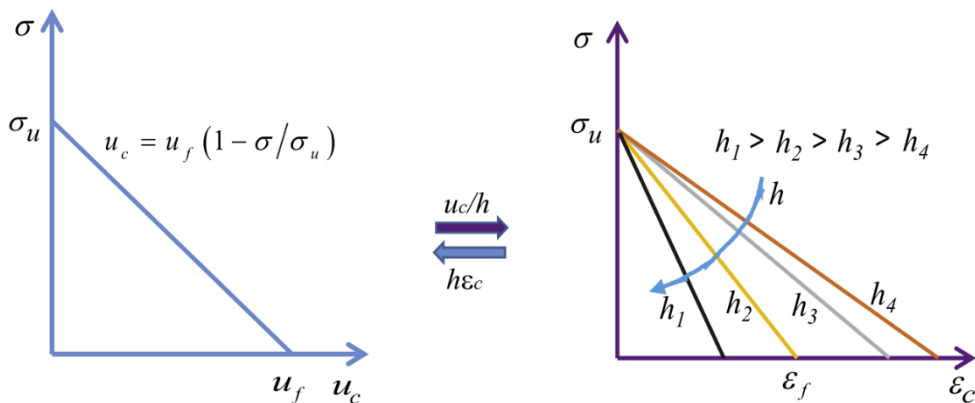
$$u_e = \frac{\sigma}{E} L_e \quad (2)$$

Donde  $L_e$  es la longitud del elemento finito. Asumiendo ablandamiento lineal, el desplazamiento por la abertura de la grieta está dado por:

$$u_c = u_f \left( 1 - \frac{\sigma}{\sigma_u} \right) \quad (3)$$

Donde  $u_f$  es el desplazamiento máximo provocado por la abertura de la grieta. Éste se determina con la energía de fractura por unidad de área,  $G_f$ , la cual se considera una propiedad del material (Hillerborg, 1985) y es igual al área bajo la rama de ablandamiento en la curva esfuerzo-desplazamiento de fractura:

$$G_f = \int_0^{\infty} \sigma(u_c) du_c \quad (4)$$



**Figura 2.3.** La respuesta carga-desplazamiento permanece constante aunque se utilicen distintos tamaños de la banda de agrietamiento. Tomado de Xu y Waas (2016).

El diagrama esfuerzo-desplazamiento por fractura *del elemento finito con ablandamiento* se muestra en la Figura 2.3. Note que  $u_c$  se mide a partir de que se

alcanza  $\sigma_t$ . Se aprecia también la definición gráfica de  $G_f$ . Para el caso particular de ablandamiento lineal, se tiene:

$$G_f = \frac{\sigma_t u_f}{2} \quad (5)$$

Resolviendo (5) para  $u_f$ , y sustituyendo (2) y (3) en (1), el desplazamiento del elemento fracturado es:

$$u = \frac{\sigma}{E} L_e + \frac{2G_f}{\sigma_t} \left( 1 - \frac{\sigma}{\sigma_t} \right) \quad (6)$$

Si se incluye el desplazamiento del resto de los elementos finitos, los cuales se están descargando elásticamente, y se expresa el esfuerzo normal en función de la carga aplicada, se obtiene el desplazamiento total de la barra en cualquier instante *del ablandamiento*:

$$\delta = \frac{P}{EA} L + \frac{2G_f}{\sigma_t} \left( 1 - \frac{P}{\sigma_t A} \right) \quad (7)$$

Se aprecia en la ecuación (7) que la respuesta carga-desplazamiento de la barra con ablandamiento es independiente del mallado, ya que no aparece el término  $L_e$ . Note también que, durante el ablandamiento, la variación en la carga es negativa, por lo que el desplazamiento elástico disminuye hasta llegar a cero, mientras que el desplazamiento por fractura aumenta hasta llegar a  $u_f$ . El desplazamiento total de la barra al fracturarse es únicamente  $u_f$ , medido a partir del desplazamiento asociado a  $\sigma_t$ . Se puede llegar a la misma conclusión en el caso de ablandamiento no lineal mediante un análisis análogo.

Para utilizar el modelo de la grieta cohesiva en una formulación continua, se asume que la extensión del elemento agrietado se encuentra distribuido en una cierta distancia,  $h$  (Bazant & Oh, 1983). Para el caso unidimensional,  $h$  es igual al tamaño del elemento finito. La ecuación (1) se reformula para el caso continuo:

$$\frac{u}{L_e} = \frac{u_e}{L_e} + \frac{u_c}{L_e} \Leftrightarrow \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_c \quad (8)$$

La deformación total del elemento agrietado se divide en deformación elástica,  $\varepsilon_e$  y deformación por ablandamiento,  $\varepsilon_c$ . Esta última es gobernada por una relación esfuerzo-deformación que se escala a partir del desplazamiento por fractura. Para el caso de ablandamiento lineal, la normalización es con respecto a la ecuación (3), tal que:

$$\varepsilon_c = \frac{2G_f}{L_e \sigma_t^2} (\sigma_t - \sigma) \quad (9)$$

Por lo tanto, la deformación por agrietamiento es dependiente del mallado: para distintos  $L_e$ , la relación esfuerzo deformación es diferente. Sin embargo, la correspondiente relación esfuerzo-desplazamiento no cambia con el mallado. La reciprocidad entre ambas formulaciones se representa en la Figura 2.3. El desplazamiento total de la barra, utilizando la formulación continua, es:

$$\delta = \varepsilon_e (N_e - 1) L_e + (\varepsilon_e + \varepsilon_c) L_e = \frac{P}{EA} L + \frac{2G_f}{\sigma_t} \left( 1 - \frac{P}{\sigma_t A} \right) \quad (10)$$

Esta expresión es idéntica a la ecuación (7), por lo que se asegura objetividad en el mallado y se evita modelar el proceso de fractura con el modelo de la grieta ficticia, pues para casos más generales se vuelve necesario implementar modelos interfaz y remallar en cada iteración (Bazant & Planas, 1998).

En modelos en 2 o 3 dimensiones, la independencia del diagrama esfuerzo-desplazamiento al mallado también se puede conseguir si se conoce el tamaño de la zona en la que se distribuye la grieta cohesiva. En estos casos, la deformación inelástica suele localizarse en una fila de elementos atravesando el mallado, formando lo que se denomina como banda de agrietamiento. La determinación del ancho,  $h$ , no es directa en los modelos de daño continuo, ya que depende del tipo y forma del elemento finito, la dirección del agrietamiento (y, por lo tanto, de la banda) con respecto a las líneas del mallado y, para elementos de orden superior, del esquema de integración (de Borst *et al.* 1993).

Para asegurar la objetividad en modelos más complejos, nuevamente se recurre a criterios energéticos. El área bajo la curva  $\sigma$ - $\varepsilon$  es la energía de fractura por unidad de volumen, denotada como  $g_f$ .

$$g_f = \int_0^{\infty} \sigma(\varepsilon_f) d\varepsilon_f \quad (11)$$

Físicamente, representa la energía disipada por unidad de volumen de la zona de fractura comprendida dentro de la banda de agrietamiento. Esta energía depende del ancho de la banda, como se aprecia en la Figura 2.3. Para un proceso de fractura en el que el agrietamiento se encuentra distribuido en una banda de ancho  $h$ , se cumple la relación:

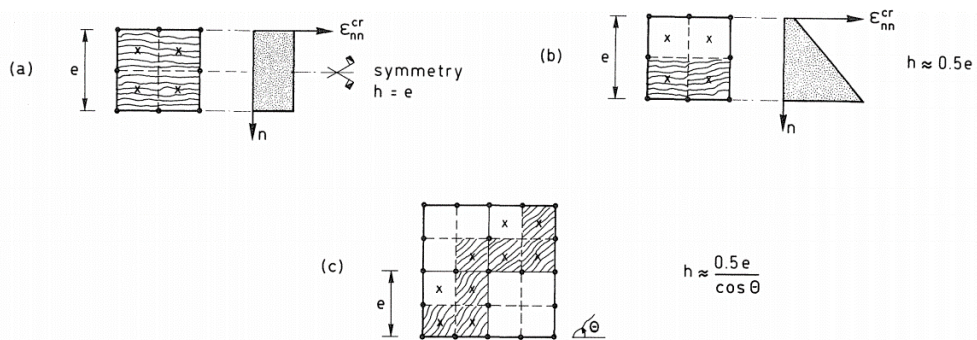
$$G_f = h g_f \quad (12)$$

### 2.3 Propuestas para la determinación del ancho de la banda de agrietamiento

Rots *et al.* (1985) propusieron anchos de banda de agrietamiento en elementos *cuadráticos* rectangulares, haciendo distinción entre tres casos:

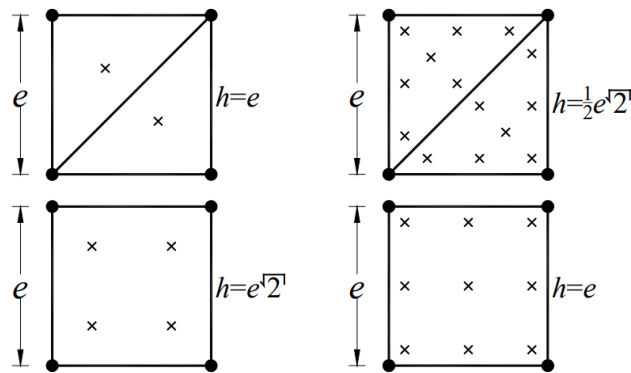
1. Agrietamiento por tensión (Modo I), donde la propagación de la banda es paralela a las líneas del mallado y, por lo tanto, conocida. La simetría en estos problemas implica que la fractura final se localiza en el ancho del elemento finito completo. El agrietamiento se distribuye en tres puntos de Gauss (9 puntos en 2D) para integración completa y dos puntos de Gauss

- (4 puntos en 2D) en el caso de subintegración. La relación (12) se cumple exactamente.
2. Agrietamiento con propagación aproximadamente paralela a las líneas del mallado y conocido. Se asume que tiende a localizarse en un punto de integración. En consecuencia, cuando se utiliza la integración reducida de cuatro puntos, el ancho de la banda es igual a la mitad del ancho del elemento finito. La distribución de las deformaciones a lo largo de la banda de agrietamiento es lineal. Ya que el punto de Gauss se ubica cerca del centro de la banda, la deformación en este punto será casi igual a la de dicho centro. La relación (12) se cumple aproximadamente.
  3. Propagación del agrietamiento que no sigue las líneas del mallado y no es conocido. Sigue un patrón en zigzag a lo largo de éste. Una primera aproximación del ancho de banda fue desarrollada por Bazant y Oh (1983) para este caso. La expresión se incluye en la Figura 2.4. Posteriormente, Rots (1988) estimó otras fórmulas aproximadas para propagación de grietas en zigzag, las cuales se obtuvieron a prueba y error, para diferentes tipos de elemento y de integración, las cuales se muestran en la Figura 2.5.



**Figura 2.4.** Estimación del ancho de la banda de agrietamiento para distintas circunstancias: a) modo I con simetría, b) problema no simétrico, pero con propagación del agrietamiento paralelo a la malla y c) propagación del agrietamiento arbitrario. Tomado de Rots *et al.* (1985).



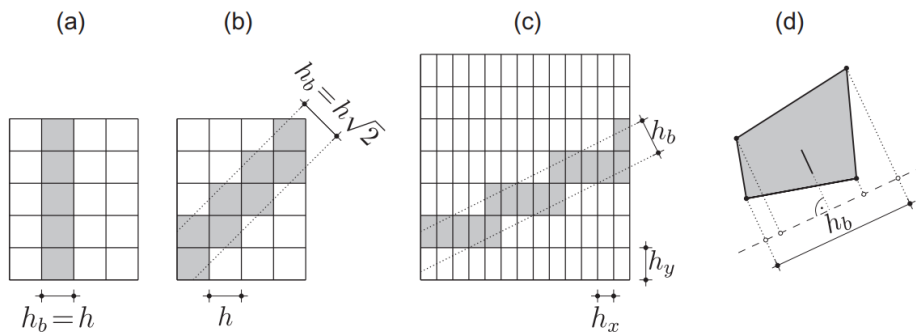


**Figura 2.5.** Ancho de banda efectivo para propagación del agrietamiento en zigzag, a través de mallas regulares de elementos finitos tipo triángulo y cuadrilátero, con diferente número de puntos de integración. Adaptado de Rots (1988).

El ancho de la banda de agrietamiento no sólo depende de las dimensiones del mallado, sino también de la orientación de la banda con respecto a las líneas de la malla. Es por esto que el ancho efectivo de la banda que se propaga a lo largo de las diagonales de una malla regular de cuadrados como el de la Figura 2.6b es  $\sqrt{2}$  veces más grande que en el caso donde la banda está alineada con los lados de los elementos (Figura 2.6a).

Considere ahora que la banda de agrietamiento se propaga en una malla rectangular con una cierta inclinación, como se muestra en la Figura 2.6c. El área de la banda recta formada por las líneas punteadas es la misma que el área de los elementos sombreados que constituyen la banda en zigzag (Bazant 1985). Por lo tanto, la distancia entre las líneas punteadas paralelas es el tamaño efectivo de la banda. Esta distancia corresponde a la proyección de un elemento en la dirección perpendicular a las líneas punteadas.

Esto motivó a una regla general que puede aplicarse a elementos de forma arbitraria [Červenka y Pukl (1994), Červenka *et al.* (1995) y Jirásek y Horák (2010)]: el tamaño efectivo de la banda de agrietamiento se estima proyectando dicho elemento en la dirección perpendicular a la dirección asumida de propagación de la banda, como se muestra en la Figura 2.6d. La forma más simple de predecir la dirección de la banda es mediante la dirección de las deformaciones principales. Se espera que la banda sea perpendicular a la dirección asociada a la deformación principal mayor, y su tamaño se determina proyectando el elemento en esa dirección. Govindjee *et al.* (1995) desarrollaron un método de proyección muy similar, el cual considera también agrietamiento por compresión. De acuerdo con Červenka *et al.* (1995), el método de proyección estándar sobreestima la energía disipada en bandas de agrietamiento que están inclinadas con respecto a las líneas del mallado. Es por esto que, [en la misma fuente](#), se propuso multiplicar el ancho de banda obtenido por proyección por un factor de orientación correctivo, el cual es igual a 1 para agrietamiento perpendicular a las líneas del mallado e igual a 1.5 para propagación del agrietamiento a  $45^\circ$ , interpolando linealmente para ángulos intermedios.



**Figura 2.6.** a) Banda de agrietamiento paralela a los lados del elemento, b) banda de agrietamiento propagándose diagonalmente, c) banda de agrietamiento inclinada en un mallado rectangular y d) determinación del ancho de banda efectivo por proyección. Tomado de Jirásek y Bauer (2012).

Oliver (1989) desarrolló dos métodos para estimar  $h$ . La primera técnica se basa en una función auxiliar a la cual se le asigna valor 0 en un lado de la banda y 1 en el otro lado. Los valores intermedios se obtienen interpolando a lo largo de la banda utilizando funciones de forma. El ancho efectivo de la banda de agrietamiento se calcula como el valor recíproco de la derivada direccional de la función, evaluada en la dirección normal a la banda (a la propagación del agrietamiento). En el segundo método, la banda de agrietamiento es igual al área del elemento dividida por una longitud de agrietamiento equivalente. Jirásek y Bauer (2012) analizaron estas propuestas e identificaron posibles fuentes de errores. La influencia de los elementos finitos, el esquema de integración y la expresión para calcular el ancho de banda de agrietamiento fueron analizados en un modelo de tensión en una dimensión y en un modelo en dos dimensiones de una viga con una abertura sujeta a flexión. Slobbe (2015) desarrolló mejoras al método del ancho de banda de agrietamiento para reducir la dependencia a la dirección del mallado. Estas modificaciones fueron implementadas en simulaciones numéricas de análisis lineal secuencial. Los resultados fueron aplicables a análisis no lineales con elementos finitos, problemas en tres dimensiones y otros mecanismos de falla.

Actualmente, la mayoría de los programas de análisis por el método de elementos finitos que modelan el agrietamiento del concreto con una aproximación continua, calculan  $h$  en función del tamaño del elemento finito o utilizando un método de proyección. En DIANA TNO,  $h$  se puede calcular utilizando las fórmulas empíricas de Rots (1985) y mediante el método de proyección desarrollado por Govindjee (1995) (DIANA FEA, 2021). En la aproximación de Rots (1985) que considera únicamente la geometría del elemento, el tamaño de la banda es  $h = \sqrt{2A_e}$  para elementos lineales en dos dimensiones y  $h = \sqrt{A_e}$  para elementos de orden superior en dos dimensiones, en donde  $A_e$  es el área total del elemento. Para elementos sólidos, la expresión predeterminada es  $h = \sqrt[3]{V_e}$ , siendo  $V_e$  el volumen del elemento. En el caso de elementos viga o armadura, se calcula como  $h = V_e / \bar{A}_e$ , donde  $\bar{A}_e$  es el área media de la sección transversal.

En otro programa con la capacidad de modelar agrietamiento, ATENA (Advanced Tool for Engineering Nonlinear Analysis),  $h$  se calcula con el método de proyección

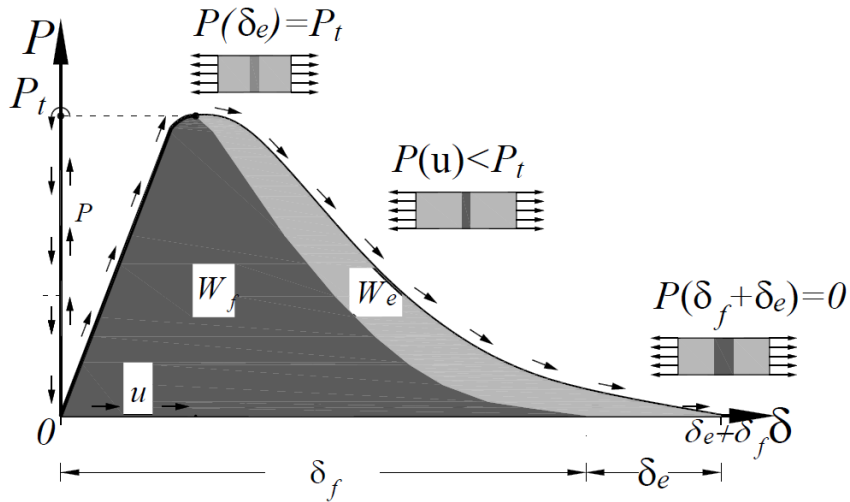
desarrollado por Červenka *et al.* (1995) descrito previamente, considerando también el factor correctivo por orientación (Červenka *et al.* 2020).

En un tercer software, Midas FEA,  $h$  se calcula con las mismas expresiones que utiliza DIANA TNO para elementos lineales en dos y tres dimensiones, y  $h = 0.5\sqrt{A_e}$  y  $h = 0.5\sqrt[3]{V_e}$  y para sus respectivas contrapartes de orden superior (Midas FEA, 2019). En los tres programas descritos, el usuario puede definir un criterio para determinar  $h$ .

Juárez *et al.* (2021) encontraron que, en una formulación convencional de elemento finito con modelo de daño isotrópico y comportamiento inelástico asociado a la banda de agrietamiento, se requiere de energía adicional a la esperada para la formación del área de agrietamiento; esta energía adicional es de magnitud igual a la energía elástica. Concluyeron que esto se debe a que en los modelos de daño, la formulación es con respecto a deformaciones totales [Jirásek (2011), Juárez *et al.* (2014), He *et al.* (2019)] y a la cinemática de los elementos finitos lineales, lo cual implica que la energía elástica, denotada como  $W_e$ , se atore, pues las zonas fuera de la zona de agrietamiento no se recuperan durante el proceso de fractura. Otros tipos de modelos, como el modelo de agrietamiento distribuido, considera que  $W_e$  se utiliza naturalmente en recuperar la forma original de las zonas de descarga, ya que su formulación separa la deformación en elástica y de fractura (Rots *et al.* 1985). Si  $W_f$  es la energía liberada durante el proceso de fractura, se tiene la relación:

$$W_f = A_f G_f \quad (13)$$

Donde  $A_f$  es el área de fractura. Debido a esta sobreestimación de la energía disipada, los resultados de los análisis con modelos de daño continuo implementando la banda de agrietamiento serán dependientes del mallado. En la Figura 2.7 se muestra la curva carga-desplazamiento durante el ablandamiento que erróneamente sobreestima la energía liberada, siendo el área adicional igual en magnitud a la energía elástica.



**Figura 2.7.** Sobreestimación de la energía liberada durante el proceso de fractura. Tomado de Juárez *et al.* (2021).

Tomando esto en consideración, Juárez *et al.* (2021) desarrollaron dos soluciones:

1) Modificar la energía de fractura por unidad de volumen y mantener el ancho de banda de agrietamiento igual a la longitud del elemento,  $h = L_e$ . Sustrayendo  $g_e$  de  $g_f$ :

$$g_{F \text{ mod}} = g_F - g_E = \frac{G_F}{L_e} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_u^2}{E} \quad (14)$$

2) Calcular un ancho de banda de agrietamiento, igualando la energía de fractura por unidad de área normalizada con  $g_{f \text{ mod}}$ :

$$\frac{G_F}{h_{\text{mod}}} = \frac{G_F}{L_e} - \frac{1}{2} \frac{\sigma_u^2}{E} \quad (15)$$

Resolviendo para  $h_{\text{mod}}$  en la ecuación (15) se obtiene un ancho de banda de agrietamiento que es dependiente de las propiedades mecánicas y geométricas del elemento:

$$h_{\text{mod}} = \frac{L_e}{1 - \frac{\sigma_u^2 L_e}{2EG_F}} \quad (16)$$

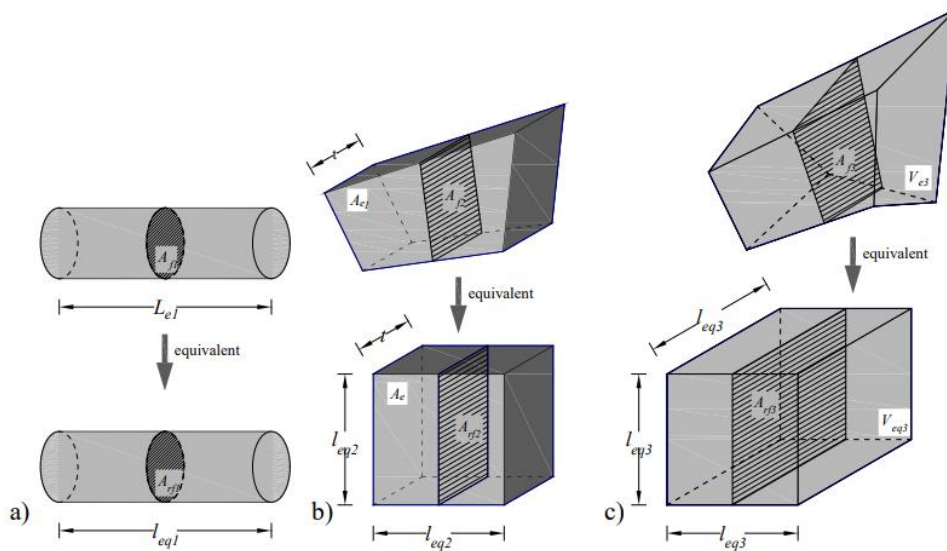
Las definiciones  $g_{\text{mod}}$  y  $h_{\text{mod}}$  están basados en el análisis de la cinemática de un modelo de banda continuo y en la energía de fractura por unidad de área que debe ser disipada en un volumen por una fractura completamente desarrollada. Estas soluciones fueron propuestas originalmente en Juárez *et al.* (2021) para una solución cerrada del problema de localización de deformaciones en una barra con

ablandamiento sujeta a tensión utilizando modelos de daño continuo, y en el presente trabajo se utilizará en la solución de problemas de materiales cuasi-frágiles con el método de los elementos finitos.

Con base en un análisis geométrico, Juárez y Ayala (2021) ampliaron la ecuación para considerar la inclinación del elemento finito con respecto a la dirección de propagación de la banda de agrietamiento:

$$h_{\text{mod}}(l_{eq}, \theta) = \frac{l_{eq} \cos \theta}{1 - \frac{\sigma_u^2 l_{eq} \cos \theta}{2EG_f}} \quad \theta = [0, \pi/4] \quad (17)$$

Donde la longitud equivalente,  $l_{eq}$ , es la longitud que debe tener cada lado de un elemento 2D (exceptuando el espesor) y 3D para preservar el volumen del elemento finito original, en caso de ser irregular.



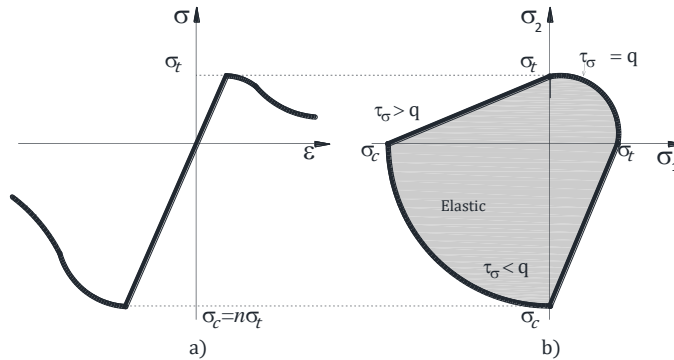
**Figura 2.8.** Elementos finitos equivalentes en 1D, 2D y 3D. Tomado de Juárez y Ayala (2021).

### 3 Modelos constitutivos de daño

El modelo utilizado en los casos de estudio de la sección 4 es el modelo de daño isotrópico desarrollado por Juárez *et al.* (2014). En este tipo de modelos se asume que la degradación es isotrópica, los módulos de rigidez correspondientes a distintas direcciones decrecen proporcionalmente, independientemente de la dirección de la carga (Jirásek, 2011). Adicionalmente, se considera que la relación de Poisson no se degrada, por lo que la reducción relativa de todos los módulos de rigidez es la misma. Una característica importante de este modelo es que considera diferentes umbrales de daño en compresión y tensión, lo cual es consistente con el comportamiento del concreto. Éste se define mediante las ecuaciones siguientes:

a) Densidad de energía libre	$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}, r) = (1 - d(r)) \Psi_0$	
b) Ecuación constitutiva	$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = (1 - d) \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$	
c) Variable de daño	$d(r) = 1 - \frac{q}{r}; \quad q \in [r_0, 0]; \quad d \in [0, 1]$	
d) Ley de evolución de daño	$\dot{r} = \gamma \begin{cases} r \in [r_0, \infty] \\ r_0 = r _{t=0} = \frac{\sigma_y}{\sqrt{E}} \end{cases}$	(18)
e) Criterio de daño	$f(\tau_\sigma, q) = \chi \tau_\sigma - q = \chi \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}} - r$	
f) Regla de endurecimiento/ ablandamiento	$\dot{q} = H^d(r) \dot{r}; \quad H^d(r) = q'(r) \leq 0$	
g) Condiciones de carga/descarga	$f < 0; \quad \gamma \geq 0; \quad \gamma f = 0; \quad \dot{\gamma} f = 0$ (consistencia)	

Donde  $\Psi$  es la densidad de energía libre,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es el tensor de deformaciones,  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de esfuerzos y  $\mathbf{C}$  es el tensor elástico. La variable de daño,  $d$ , se define en función de la variable de ablandamiento/endurecimiento  $q$ , la cual es dependiente del parámetro de ablandamiento/endurecimiento  $H$ . El multiplicador de daño  $\gamma$  determina las condiciones de carga/descarga; la función  $f(\tau_\sigma, q)$  delimita el dominio elástico que define la superficie de daño en el espacio de esfuerzos. El valor  $r_0$  determina el límite del dominio elástico inicial, es decir,  $q = r_0$ . El modelo de daño para el caso unidimensional y bidimensional se muestra en la Figura 3.1.



**Figura 3.1.** Comportamiento constitutivo del concreto simple: a) 1D y b) 2D. Tomado de Juárez *et al.* (2014).

La ecuación constitutiva tangente, en términos de variaciones, es:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^T : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (19)$$

En donde  $\mathbf{C}^T$  es el operador constitutivo tangente continuo, el cual relaciona la variación de esfuerzos con la variación de deformaciones. En el intervalo lineal ( $d = 0$ ) se define como:

$$\mathbf{C}^T = (1-d)\mathbf{C} \quad (20)$$

Y para el intervalo no lineal se tiene:

$$\mathbf{C}^T = (1-d)\mathbf{C} - \frac{q - H_r}{r^3} \chi^2 (\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \otimes \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}) \quad (21)$$

El parámetro  $\chi$  se introduce en la norma y en el tensor constitutivo tangente para considerar que la superficie de fallo y el comportamiento no lineal son distintos, dependiendo de si el estado de esfuerzos es de tensión triaxial, compresión triaxial o intermedio. Este parámetro está dado por:

$$\chi = \phi + \left( \frac{1-\phi}{n} \right) \quad (22)$$

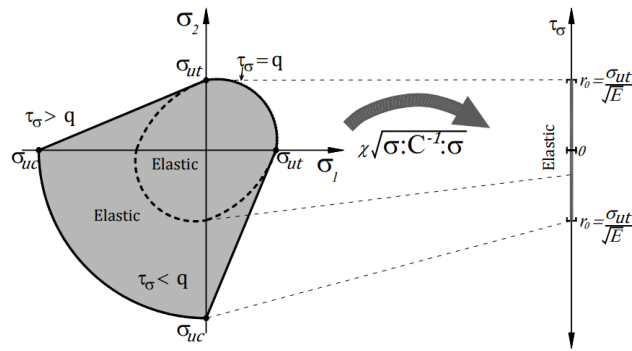
Donde  $n$  es la razón entre el esfuerzo máximo de compresión y el de tensión:

$$n = \frac{\sigma_{uc}}{\sigma_{ut}} \quad (23)$$

Y  $\phi$  es un factor de peso que depende de los esfuerzos principales,  $\sigma_i$ :

$$\phi = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|} \quad (24)$$

En esta ecuación, el operador de Macaulay  $\langle \rangle$  y el símbolo  $||$  consideran, respectivamente, las magnitudes positivas y absolutas de los esfuerzos principales. El intervalo de  $\phi$  es  $[0, 1]$ , delimitado por 0 cuando se presenta compresión triaxial ( $\sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1 \leq 0$ ) y 1 para tensión triaxial ( $0 \leq \sigma_3 \leq \sigma_2 \leq \sigma_1$ ). Por lo tanto, el intervalo de  $\chi$  es  $[1/n, 1]$ , tomando el valor  $1/n$  para compresión triaxial y 1 para tensión triaxial. Considerando este intervalo y el criterio de daño dado en el inciso e) de la ecuación (18), se observa que el parámetro escala  $1/n$  veces la norma, de tal forma que se pueda comparar con el intervalo elástico  $[0, r_0]$ , como se muestra en la Figura 3.2.



**Figura 3.2.** Transformación del estado de esfuerzos a la norma. Tomado de Juárez *et al.* (2014).

En la Figura 3.3 se muestra el modelo de daño isotrópico para el caso unidimensional, considerando ablandamiento lineal y exponencial. Las áreas bajo la curvas esfuerzo-deformación corresponden a  $g_f$  en la parte de tensión y a  $g_c$  en la rama de compresión. La relación entre estas dos energías por unidad de volumen es:

$$g_c = n^2 g_f \tag{25}$$

Donde  $n$  está dada por (23). Las relaciones esfuerzo-deformación para el modelo de daño isotrópico en el caso unidimensional con ablandamiento lineal son:

$$\sigma_{li}(\varepsilon) = \begin{cases} Eh_l\varepsilon + \sigma_c(h_l - 1); & \varepsilon < -\varepsilon_c \\ E\varepsilon; & -\varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon_t \\ Eh_t\varepsilon + \sigma_c(1 - h_t); & \varepsilon > \varepsilon_t \end{cases} \tag{26}$$

Considerando ablandamiento exponencial, se tiene:

$$\sigma_{ex}(\varepsilon) = \begin{cases} -\sigma_t e^{-h_e \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_c} + 1\right)}; & \varepsilon < -\varepsilon_c \\ E\varepsilon; & -\varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon_t \\ \sigma_t e^{h_e \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_t} - 1\right)}; & \varepsilon > \varepsilon_t \end{cases} \tag{27}$$

En ambos modelos, las deformaciones últimas en tensión y compresión son, respectivamente:



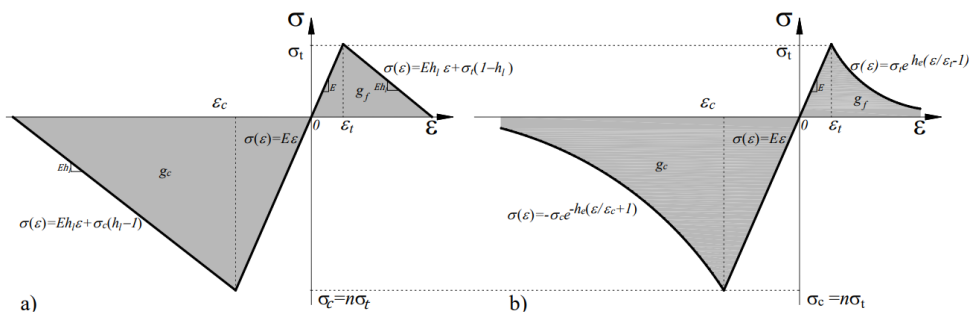
$$\varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E} \quad (28)$$

$$\varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E} \quad (29)$$

Los módulos de ablandamiento lineal y exponencial son, respectivamente:

$$h_l = -\frac{1}{2} \frac{\sigma_t^2}{E g_f} \quad (30)$$

$$h_e = -\frac{\sigma_t^2}{E g_f} \quad (31)$$



**Figura 3.3.** Modelo de daño continuo 1D con: a) ablandamiento lineal, b) ablandamiento exponencial y c) rango de esfuerzos. Tomado de Juárez *et al.* (2021).

El área bajo la curva esfuerzo-deformación de la parte inelástica, está normalizada con respecto al ancho de la banda de agrietamiento por medio de la energía de fractura por unidad de volumen,  $g_f$ , en las ecuaciones (30) y (31) (los módulos de ablandamiento). Se sustituye  $g_f$  de la ecuación (12), en la cual tanto  $G_f$  como  $h$  son conocidos. Esta regularización se utiliza también en la formulación general del modelo de daño isotrópico.

#### 4 Casos de estudio

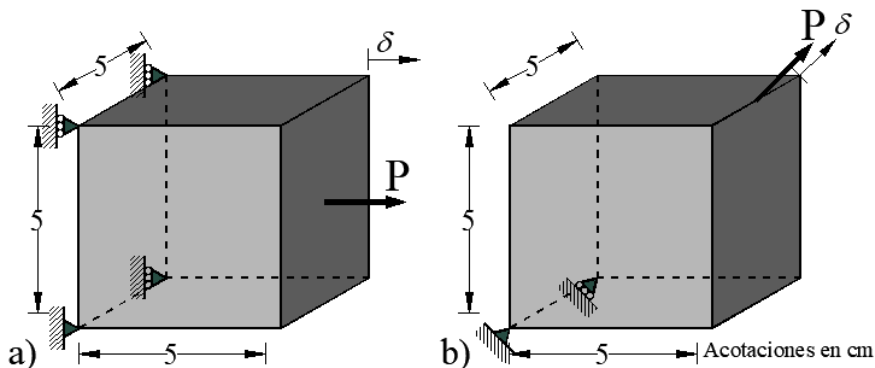
Se estudió el proceso de fractura de múltiples especímenes a los cuales se les asignó el modelo de daño continuo descrito en la sección 3, asociando el módulo de ablandamiento a la banda de agrietamiento, de tamaño  $h$ . Se emplearon tres criterios para calcular el ancho,  $h$ :  $h = L_e$ ,  $h = \sqrt{2}L_e$  y  $h = h_{mod}$  [ecuación (16)]. Las primeras dos alternativas corresponden a las expresiones que comúnmente se emplean en los programas de elementos finitos, descritas en la sección 2, considerando que los elementos son regulares. Para cada caso se compararon las curvas carga-desplazamiento resultantes y se calculó la energía de fractura por unidad de área,  $G_f$ . Se consideró ablandamiento lineal y exponencial. Los análisis se realizaron en el programa FEAP (Finite Element Analysis Program), desarrollado

por Taylor (2008), al cual se le implementó el modelo de daño continuo desarrollado por Juárez *et al.* (2014).

#### 4.1 Espécimen en tensión axial y tensión diagonal

Se evaluó un elemento cuadrado de 5 cm de longitud en cada lado, el cual fue sujeto a tensión axial y tensión diagonal independientemente, como se ilustra en la Figuras 4.1a y 4.1b, respectivamente. Note que cada elemento tiene distintas condiciones de apoyo y de carga. Las propiedades mecánicas del material son: módulo de elasticidad  $E = 20,000$  MPa, relación de Poisson,  $\nu = 0.2$ , esfuerzo último a tensión  $\sigma_t = 2.4$  MPa y energía de fractura por unidad de área,  $G_f = 90$  J/m<sup>2</sup>. Las áreas de agrietamiento son perpendiculares a la dirección de la carga, como se muestran en la Figuras 4.1a y 4.1b, respectivamente, y tienen un valor de  $A_{fa} = 0.0025$  m<sup>2</sup> y  $A_{fb} = 0.0035355$  m<sup>2</sup>.

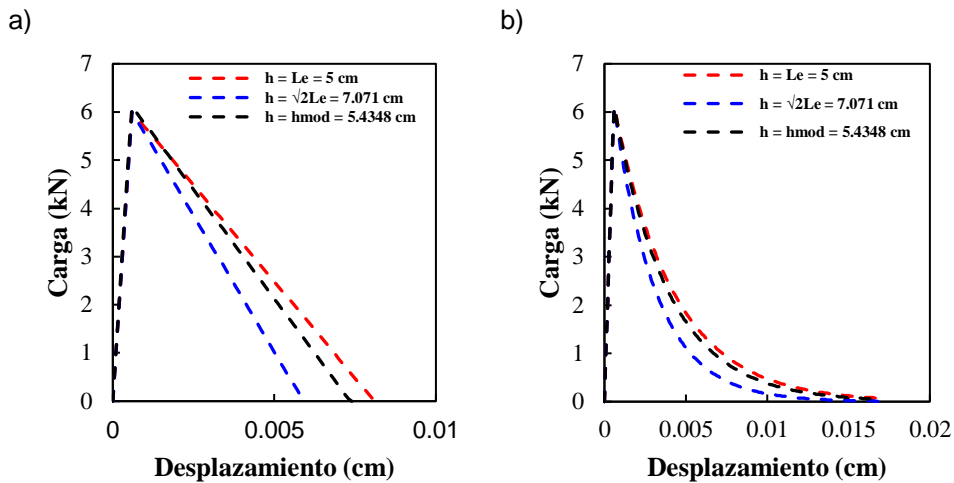
Al tratarse de un único elemento finito en el modelo de banda de agrietamiento, la energía disipada,  $W_f$ , se distribuye en todo el volumen. Esta energía disipada total debe ser [ecuación (13)]:  $W_{Fa} = 0.225$  J y  $W_{Fb} = 0.3182$  J para el caso de tensión axial y tensión diagonal, respectivamente. El espécimen fue modelado con un elemento cuadrilátero lineal y tres tamaños de la banda de agrietamiento fueron evaluados:  $h_1 = \sqrt{A_{fa}} = L_e = 5$  cm,  $h_2 = \sqrt{2A_{fa}} = \sqrt{2}L_e = 7.0711$  cm,  $h_3 = h_{mod} = 5.4348$  cm para el caso de tensión en carga axial y  $h_3 = h_{mod} = 3.7475$  cm para tensión en carga diagonal. Estos dos últimos tamaños de la banda se calcularon con la ecuación (17) utilizando  $\theta = 0^\circ$  para el caso de tensión axial y  $\theta = 45^\circ$  en tensión diagonal. Un modelo similar fue estudiado por Juárez *et al.* (2021), utilizando elementos lineales con cuadratura de 2x2 y considerando ablandamiento lineal. Para el análisis de este ejemplo, además, se utilizó cuadraturas de 1x1 y de 3x3, elementos de orden superior y ablandamiento exponencial.



**Figura 4.1.** Elemento finito sujeto a: a) tensión axial b) tensión diagonal.

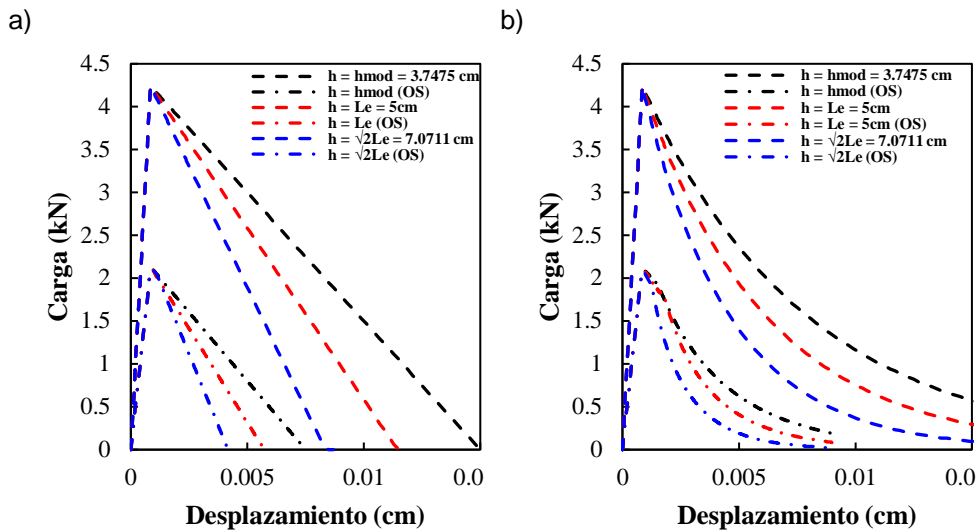
Los resultados de los análisis para el caso de tensión axial, [ilustrado en la Figura 4.1a](#), se presentan en la Figura 4.2. Se aprecia que para todos los casos se obtuvo el mismo comportamiento elástico lineal inicial y las diferencias comenzaron después de la carga pico, durante el comportamiento inelástico. Se calculó la energía total liberada en cada caso,  $W_F$ , y los resultados se enlistan en la Tabla 1. Se observa que únicamente el criterio de  $h_{mod}$  cumplió con la energía que se debía liberar, de acuerdo a  $W_F = G_F A$ , con porcentaje de error igual a cero. Las curvas obtenidas para

los distintos anchos de banda evaluados fueron idénticas para las 3 cuadraturas empleadas, así como para los análisis utilizando elementos de orden superior.

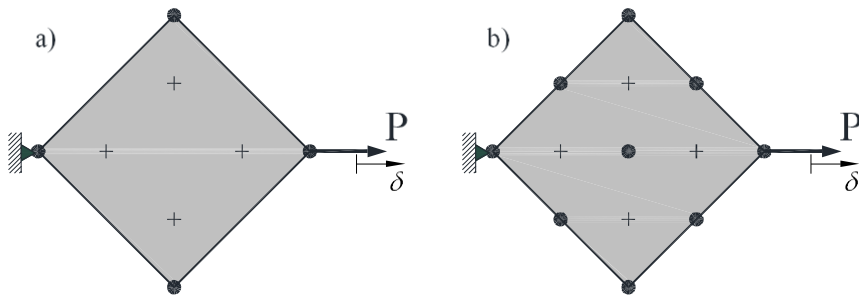


**Figura 4.2.** Curvas carga-desplazamiento del elemento en tensión axial considerando: a) ablandamiento lineal y b) ablandamiento exponencial.

La respuesta del elemento sujeto a tensión diagonal, Figura 4.1b, se presenta en la Figura 4.3. Nuevamente, para cada ancho de banda evaluado se obtuvo la misma curva utilizando cuadraturas de 1x1, 2x2 y 3x3, tanto para el ablandamiento lineal como el exponencial. Sin embargo, la respuesta utilizando elementos de orden superior de 8 nodos fue notoriamente diferente, como se puede apreciar en la Figura 4.3, donde "OS" indica elementos de orden superior. El elemento de orden superior resultó más flexible que su contraparte de 4 nodos, por lo que la pendiente del intervalo elástico fue menor. Otra observación es que tanto la carga última como el desplazamiento último fueron de aproximadamente la mitad de lo obtenido con el elemento de 4 nodos, por lo que la energía disipada fue subestimada, pues es aproximadamente la cuarta parte de la disipada con elementos finitos de 4 nodos. Esto se debe a que los puntos de Gauss cercanos al nodo de carga están sujetos a esfuerzos mayores que los puntos de la parte superior e inferior del elemento, lo que ocasiona que se dañen antes, como se observa en la Figura 4.4. Otros problemas al emplear elementos de orden superior fueron reportados por Jirásek y Bauer (2012).



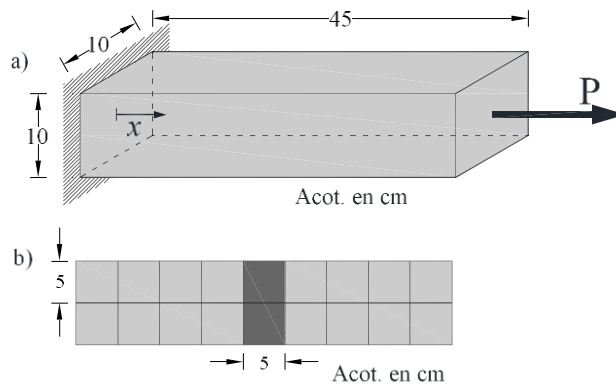
**Figura 4.3.** Curvas carga-desplazamiento del elemento en tensión diagonal considerando: a) ablandamiento lineal y b) ablandamiento exponencial.



**Figura 4.4.** Elemento finito sujeto a tensión axial: a) 4 nodos y b) 8 nodos.

## 4.2 Espécimen en tensión

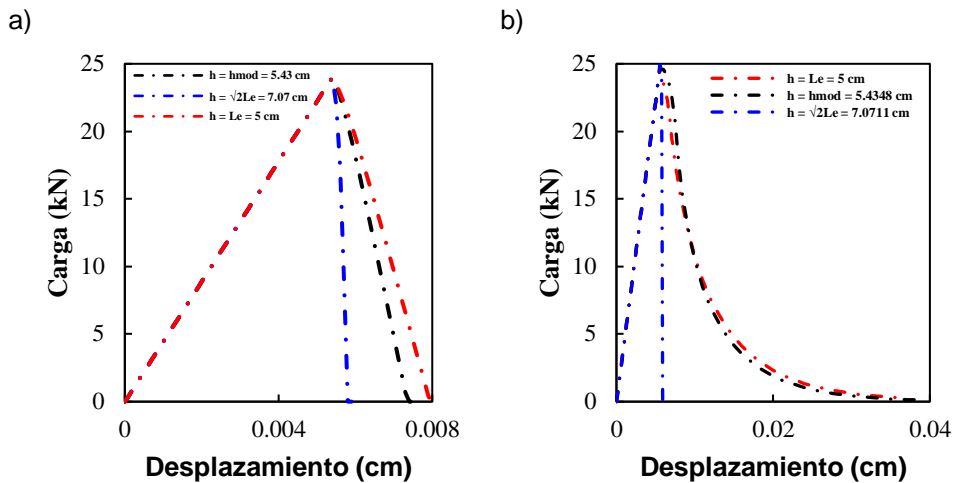
Se estudió un espécimen rectangular sujeto a tensión, el cual tiene un área de sección transversal  $A = 100 \text{ cm}^2$  y longitud  $L = 45 \text{ cm}$ , como se muestra en la Figura 4.5a. Las propiedades mecánicas del material son: módulo de elasticidad  $E = 20,000 \text{ MPa}$ , relación de Poisson  $\nu = 0.2$ , esfuerzo último a tensión  $\sigma_t = 2.4 \text{ MPa}$  y energía de fractura por unidad de área  $G_f = 0.90 \text{ J/m}^2$ . La barra está empotrada en el extremo izquierdo y cargada con  $P$  en el derecho. La carga última a tensión es  $P_t = \sigma_t A = 24 \text{ kN}$ . Este espécimen fue estudiado por Jirásek y Bauer (2012) y por Juárez y Ayala (2021).



**Figura 4.5.** Barra sujeta a tensión: a) carga y apoyos y b) mallado.

El espécimen fue modelado con elementos finitos cuadrilátero en dos dimensiones de 5 cm por lado, como se muestra en la Figura 4.5b, por lo que los anchos de banda de agrietamiento utilizados fueron los mismos que en el ejemplo 4.1. A los elementos gris claro en la malla de la figura se les asignó un esfuerzo último a tensión  $\sigma_t = 2.5$  MPa para asegurar el inicio y propagación de la fractura al centro del espécimen.

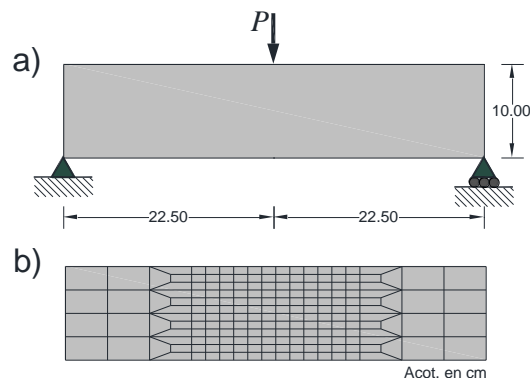
Las curvas carga-desplazamiento resultantes se muestran en la Figura 4.6. Se observa que el área correspondiente a la curva de  $h = L_e$  está sobreestimada, mientras que el área de la curva obtenida con el criterio  $h = \sqrt{2} L_e$  subestima la energía total. En el caso de ablandamiento exponencial, al utilizar este mismo ancho sucedió lo que en la literatura se conoce como “snapback” (Criesfield, 1986). Éste consiste en una disminución de la deformación en el intervalo inelástico, provocado por un valor bajo de la energía de fractura por unidad de área,  $G_f$  y un valor alto del ancho de banda de agrietamiento, que resultan en una magnitud grande del módulo de ablandamiento (ver ecuaciones (30) y (31)). La energía liberada durante el proceso de fractura debe ser (ecuación (13))  $W_F = 0.9$  J. En la Tabla 1 se enlista la energía liberada en cada caso con el porcentaje de error. Se aprecia nuevamente que únicamente la respuesta obtenida con  $h = h_{mod}$  fue consistente.



**Figura 4.6.** Curvas carga-desplazamiento del elemento sujeto a tensión considerando: a) ablandamiento lineal y b) ablandamiento exponencial.

### 4.3 Viga en flexión

Se estudia una viga de concreto simple, de sección transversal cuadrada de 100 cm por lado y longitud de 45 cm. El mallado se conforma de elementos cuadrilátero con  $2 \times 2$  puntos de integración. Éstos son de 5 cm x 2.5 cm en las partes cercanas a los extremos, seguido de una zona de transición y de elementos de 1.5 cm x 0.83 cm en el centro del claro, como se aprecia en la Figura 4.7. Las constantes elásticas son  $E = 20,000$  Mpa y  $\nu = 0.2$ . El esfuerzo último a tensión es  $\sigma_t = 2.4$  MPa y la energía de fractura por unidad de área es  $G_f = 0.90$  J/m<sup>2</sup>. Los tamaños de la banda de agrietamiento utilizados para el análisis se calcularon de acuerdo a los 3 criterios de los ejemplos previos:  $h = L_e$ ,  $h = \sqrt{2}L_e$  y  $h = h_{mod}$ , resultando en anchos de 1.5 cm, 2.12 cm y 1.537 cm, respectivamente. Este ejemplo fue estudiado previamente en (Jirásek, 2011).



**Figura 4.7.** Viga a flexión: a) carga y apoyos y b) mallado.

En la Figura 4.8 se presentan las curvas carga-desplazamiento resultantes de cada análisis y la obtenida por Jirásek (2011). Se aprecia que las respuestas calculadas con  $h = L_e$  están sobreestimadas, aunque debido al mallado tan refinado de este

modelo, tiende a coincidir más con la curva obtenida con  $h = h_{mod}$ . Esta tendencia de ambos criterios a asemejarse más al emplear tamaños del elemento finito más pequeños se explica con la ecuación (16), en la que se observa que  $h_{mod}$  tiende a ser igual a  $L_e$  conforme  $L_e$  se hace más pequeño. Por otro lado, la curva correspondiente a  $h = \sqrt{2}L_e$  subestima considerablemente la energía liberada durante la fractura. La curva calculada por Jirásek difiere mucho de las otras porque utilizó un modelo de daño isotrópico sin banda de agrietamiento. Su propósito era demostrar la dependencia del mallado explicada en la sección 2. Cabe mencionar que este espécimen no fue ensayado.

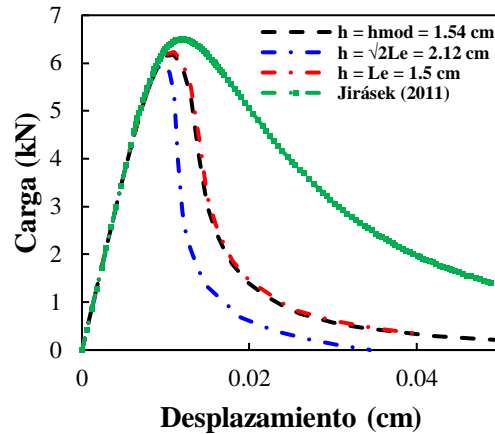


Figura 4.8. Curvas carga-desplazamiento de la viga a flexión.

#### 4.4 Barra con muescas

El cuarto caso de estudio corresponde a una barra sujeta a tensión con una muesca en la parte inferior y superior, ambas en el centro de la longitud, como se observa en la Figura 4.9. Este elemento fue ensayado por Reinhardt *et al.* (1986). El mallado consiste de elementos cuadrilátero de 0.5 cm de lado y cuadratura de  $2 \times 2$ . Las propiedades del material son  $E = 39,270$  MPa,  $\nu = 0.2$ ,  $\sigma_t = 2.4$  MPa y  $G_f = 1.0$  J/m<sup>2</sup>. Las curvas resultantes considerando ablandamiento exponencial se muestran en la Figura 4.10. Debido al reducido tamaño de los elementos, las respuestas correspondientes a  $h = L_e$  y  $h = h_{mod}$  fueron prácticamente idénticas, mientras que el criterio  $h = \sqrt{2}L_e$  nuevamente subestima la energía disipada.

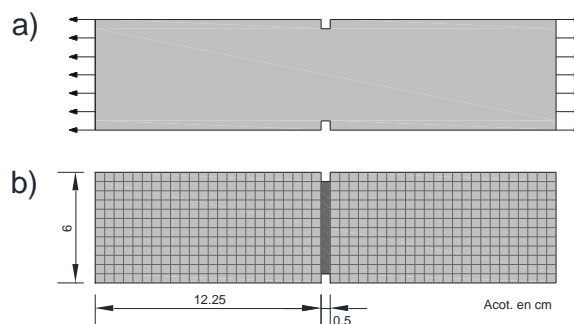
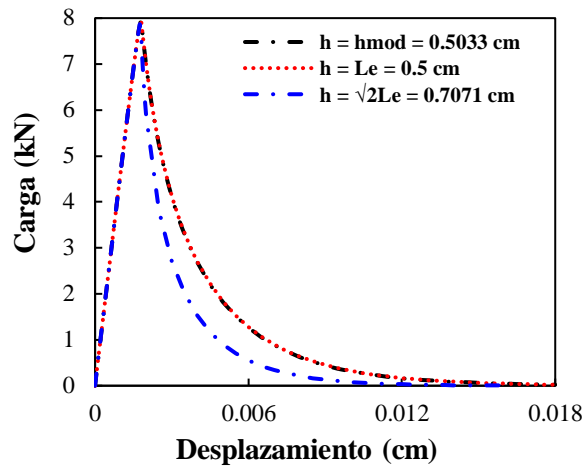


Figura 4.9. Barra con muescas al centro sujeta a tensión: a) carga y b) mallado.

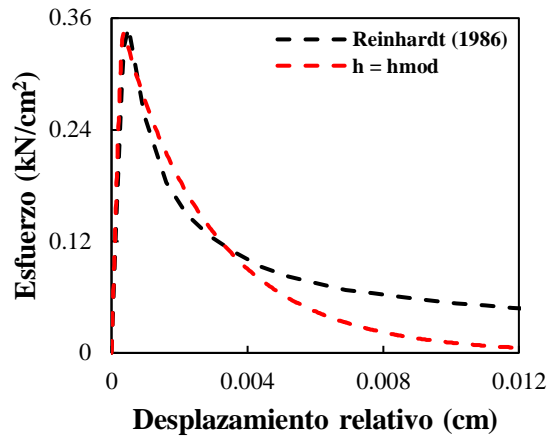


**Figura 4.10.** Curvas carga-desplazamiento de la barra con muescas al centro sujeta a tensión considerando ablandamiento exponencial.

Los resultados reportados por Reinhardt *et. al* (1986) están dados en esfuerzo medio en la sección de la muesca (carga entre área transversal de  $25 \text{ cm}^2$ ) y desplazamientos relativos registrados por extensómetros de 3.5 cm, ubicados a cada lado de la muesca. Para comparar los resultados numéricos con los experimentales, se determinó, en cada incremento, el promedio del desplazamiento relativo entre nodos distanciados 3.5 cm, a ambos lados de la muesca, y se calculó el esfuerzo medio de la misma forma que en la prueba experimental.

La curva del ensaye y del análisis numérico se ilustran en la Figura 4.11. El comportamiento elástico inicial es prácticamente idéntico, y el área bajo la curva de ablandamiento (y, por lo tanto, la energía de fractura) es similar en ambos casos. Se concluye que en los análisis de fractura en modo I en los que se utiliza el modelo de daño continuo desarrollado por Juárez *et. al* (2014) e implementando  $h = h_{mod}$ , es posible obtener una aproximación satisfactoria de la respuesta global real del elemento.





**Figura 4.11** Curvas esfuerzo-desplazamiento relativo de análisis numérico y prueba experimental

**Tabla 1.** Energía liberada durante el proceso de fractura de los modelos sujetos a tensión y porcentaje de error con respecto al  $W_f$  esperado.

Modelo	$W_f$ (% de error)		
	$h = L_e$	$h = h_{mod}$	$h = \sqrt{2}L_e$
Ejemplo 1 (tensión axial)	0.2430 J (8.02%)	<b>0.2250 J (0.00%)</b>	0.1771 J (-21.27%)
Ejemplo 1 (tensión diagonal)	0.2430 J (-23.63%)	<b>0.3182 J (0.00%)</b>	0.1771 J (-44.34%)
Ejemplo 2 (Barra regular)	0.9721 J (8.00%)	<b>0.9000 J (0.00%)</b>	0.7083 J (-21.31%)
Ejemplo 4 (Barra con muescas)	0.2517 J (0.65%)	<b>0.2500 J (0.00%)</b>	0.1797 J (-28.17%)

## 5 Conclusiones

1. En este artículo se describieron y evaluaron distintos criterios recomendados en programas de elementos finitos para estimar el tamaño de la banda de agrietamiento y la aproximación propuesta por Juárez *et al.* (2021). Para este fin se estudió el comportamiento durante el proceso de fractura de 4 elementos distintos, empleando el modelo de daño isotrópico desarrollado por Juárez *et al.* (2014).
2. Las curvas carga-desplazamiento obtenidas empleando las fórmulas empíricas para determinar el tamaño de la banda mostraron dependencia del mallado, incluso para casos de tensión pura. Esto debido a que la energía elástica se atora, como se explicó en la sección 2. Estas aproximaciones tampoco consideran la dirección del área de agrietamiento, lo que conlleva a que erróneamente se obtenga la misma respuesta de un modelo cuando la dirección de la carga (y del agrietamiento) es distinta.
3. Por otro lado, la energía disipada durante la fractura empleando  $h = h_{mod}$  fue la esperada en todos los casos de tensión pura utilizando ablandamiento lineal y elementos lineales. En el espécimen ensayado por Reinhardt (1986)

- no sólo el área bajo la curva carga-desplazamiento fue la esperada, también la forma se asemejó satisfactoriamente a la del ensaye.
4. Con base en los resultados, se recomienda utilizar la solución desarrollada por Juárez y Ayala (2021) para determinar el ancho de la banda de agrietamiento en modelos con mallados regulares que empleen modelos de daño isotrópico. Se obtiene una buena aproximación utilizando el tamaño del elemento finito como el ancho de la banda únicamente en mallados regulares y finos. El criterio  $h = \sqrt{2L_e}$  subestima considerablemente la energía disipada y no se recomienda su uso.
  5. Al utilizar elementos finitos de orden superior en el modelado, se obtuvo una respuesta incorrecta con los 3 criterios de  $h$  evaluados, pues la energía disipada y la carga última se subestiman. Por lo que se recomienda el empleo de modelos constitutivos más sofisticados cuando sea necesario utilizar elementos de orden superior en modelos similares.

## Agradecimientos

El primer autor agradece al CONACYT la beca otorgada para sus estudios de Maestría. Los autores agradecen el apoyo de la Universidad Autónoma Metropolitana.

**REFERENCIAS** Jirásek, M. & Hórák, M., 2010. Localization properties of damage models. *Computational modelling of concrete structures*, pp. 327-336.

Bazant, Z. P., 1985. Mechanics of fracture and progressive cracking in concrete. *Fracture mechanics of concrete: Structural application and numerical calculation. Engineering Application of Fracture Mechanics*, Volumen 4, pp. 1-94.

Bazant, Z. P. & Oh, B. H., 1983. Crack band theory for fracture of concrete. *Materials and Structures*, Volumen 16, pp. 155-177.

Bazant, Z. P. & Planas, J., 1998. *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. s.l.:CRC Press LLC.

Červenka, V., Pukl, R., Ozbold, J. & Eligehausen, R., 1995. Mesh sensitivity effects in smeared finite element analysis of concrete fracture. *Fracture mechanics of concrete structures*, pp. 1387-1396.

Červenka, V. & Pukl, R. S., 1994. Analysis of size effect in concrete structures. *Size effect in concrete structures*, pp. 323-333.

Criesfield, M. A., 1986. Snap-through and snap-back response in concrete structures and the dangers of under integration. *Journal for Numerical Methods in Engineering*, 22(3), pp. 751-756.

de Borst, R., Sluys, L. J., Mühlhaus, H.-B. & Pamin, J., 1993. Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation. *Engineering Computations*, 10(2), pp. 99-121.

DIANA FEA, 2021. *User's Manual*. s.l.:DIANA FEA BV.

Govindjee , S. & Simo , J., 1995. Anisotropic modelling and numerical simulation of brittle damage in concrete. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Volumen 38, pp. 3611-3633.

Govindjee, S., Kay, G. J. & Simo, J. C., 1995. Anisotropic Modelling and Numerical Simulation of Brittle Damage in Concrete. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(21), p. 3611–3633.

He, W. y otros, 2019. Tension-Compression Damage Model with Consistent Crack Bandwidths for Concrete Materials. *Advances in Civil Engineering*, Volumen 219, p. 16 Páginas.

Hillerborg, A., 1985. The theoretical basis of a method to determine the fracture energy GF of concrete. *Materials and Structures* , Volumen 18, pp. 291-296.

Hillerborg, A., Modéer, M. & Petersson, P. E., 1976. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. *Cement and Concrete Research*, 6(6), pp. 773-781.

Jirásek , M. & Bauer, M., 2012. Numerical aspects of the crack band approach. *Computers and Structures*, Volumen 110-111, pp. 60-78.

Jirásek, M., 2011. Damage and Smeared Crack Models. *Numerical modeling of concrete cracking*. CISM International Centre for Mechanical Sciences, Volumen 532, pp. 1-50.

Juárez, . L. G., Uriel, M. A. & Ayala, G., 2021. Closed form solutions for the strain localization problem in a softening bar under tension with the continuum damage and the embedded discontinuity kinematics. *Mechanics of Materials*, Volumen 158.

Juárez-Luna, G. & Ayala-Milián, G., 2021. Analysis of the crack-band approach for modeling cracking in concrete with continuous damage models. *16th U.S. National Congress on Computational Mechanics* , 25-29 Julio.

Juárez-Luna, G., Méndez-Martínez , H. & Ruiz-Sandoval, M. E., 2014. An isotropic damage model to simulate collapse in reinforced concrete elements. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 11(13), pp. 2444-2459.

Kormeling, A. & Reinhardt, H. W., 1983. *Determination of the fracture energy of normal concrete and epoxy modified concrete.*, s.l.: Stevin Laboratory.

Midas FEA, 2019. *Analysis reference manual. Midas FEA advanced Nonlinear and Detail Analysis System.* s.l.:s.n.

Oliver, J., 1989. A consistent characteristic length for smeared cracking models. *International Journal*, 28(2), pp. 461-474.

Park, K., Paulino, G. H. & Roesler , J. R., 2009. A unified potential-based cohesive model of mixed-mode fracture. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 57(6), pp. 891-908.

Reinhardt, H. W., Cornelissen , H. A. W. & Hordijk, D. A., 1986. Tensile tests and failure analysis of concrete. *Journal of Structural Engineering*, 112(11), pp. 2462-77.

Rots, J. G., 1988. *Computational modeling of concrete fracture*. Delft: Delft University of Technology.

Rots, J. G., Nauta, P., Kuster, G. M. A. & Blaauwendraad, J., 1985. Smearred Crack Approach and Fracture Localization in Concrete. *HERON*, 01 01, 30(1), pp. 1-48.

Slobbe, A. T., 2015. *Propagation and band width of smeared cracks*. s.l.:Delft University of Technology.

Taylor, L. R., 2008. *A finite element analysis program (FEAP) v8.2*. Berkeley(CA): Department of Civil and Environmental Engineering, University of California at Berkeley.

Xu, W. & Waas, A. M., 2016. Modeling damage growth using the crack band model; effect of different strain measures. *Engineering Fracture Mechanics*, Volumen 152, pp. 126-138.