

# **APPLICATION OF CLOSED FORM SOLUTIONS TO BEAMS PROBLEMS WITH SOFTENING DISCONTINUITIES**

**Ángel Uriel Martínez-Miranda <sup>(1)</sup>, Gelacio Juárez-Luna <sup>(2)</sup>**

<sup>(1)</sup> Estudiante de doctorado, Departamento de Materiales, Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana, San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Azcapotzalco, 02200, Ciudad de México. [angelmiranda52@gmail.com](mailto:angelmiranda52@gmail.com)

<sup>(2)</sup> Profesor-Investigador, Departamento de Materiales, Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad Autónoma Metropolitana, San Pablo 180, Col. Reynosa Tamaulipas, Azcapotzalco, 02200, Ciudad de México. [gjl@azc.uam.mx](mailto:gjl@azc.uam.mx)

Received: March 2022. Accepted: August 2022. Published: September 2022

## **ABSTRACT**

The development of variational formulations for thin and thick beams with softening discontinuities adapted to represent strain localization is presented. The formulation for thin beams takes into account the internal strain energy due to bending induced strains, in which the discontinuities are considered as softening hinges. For the case of thick beams, the formulation takes into account the internal strain energy due to bending and shear strains, in which the discontinuities are considered as softening hinges/dislocations. These formulations include the embedded discontinuity model, in which the discontinuity and the strain concentration are lumped into a zero-thickness localization zone. The non-linear behavior of the material is described by a discrete constitutive model, in which linear or exponential softening is considered. The boundary value problems and closed form solutions are developed from the variational formulations and the conventional methods of calculus of variations. The application of closed form solutions to practical examples modeled numerically guarantees the accuracy of the developed solutions.

**Keywords:** Strain localization; embedded discontinuities; closed form solutions; softening hinge; softening dislocation.

## **APLICACIÓN DE SOLUCIONES EN FORMA CERRADA A PROBLEMAS DE VIGAS CON DISCONTINUIDADES QUE ABLANDAN**

### **RESUMEN**

Se presenta el desarrollo de formulaciones variacionales de vigas delgadas y gruesas con discontinuidades que ablandan que se adaptan para representar la localización de deformaciones. La formulación para vigas delgadas tiene en cuenta la energía de deformación interna debida a las deformaciones inducidas por flexión, en la que las discontinuidades se consideran como articulaciones que ablandan. Para el caso de vigas gruesas, la formulación tiene en cuenta la energía de deformación interna debida a las deformaciones por flexión y cortante, en la que las

discontinuidades se consideran como articulaciones y dislocaciones que ablandan. Estas formulaciones incluyen el modelo de discontinuidades interiores, en el que la discontinuidad y la concentración de deformación se concentran en una zona de localización de ancho cero. El comportamiento no lineal del material se describe mediante un modelo constitutivo discreto, en el que se considera ablandamiento lineal y exponencial. El problema de valores en la frontera y soluciones en forma cerrada se desarrollan a partir de las formulaciones variacionales y los métodos convencionales del cálculo de variaciones. La aplicación de soluciones en forma cerrada a ejemplos prácticos modelados numéricamente garantiza la precisión de las soluciones desarrolladas.

**Palabras clave:** Localización de deformaciones; discontinuidades interiores; soluciones en forma cerrada; articulación que ablanda; dislocación que ablanda.

## 1 Introducción

El proceso de falla del material en vigas está precedido por un fenómeno de localización de deformaciones en zonas donde se concentran el daño y otros efectos no lineales. Estas zonas se convierten gradualmente en discontinuidades físicas que ablandan en un medio continuo, las cuales pueden ser grietas en el concreto, fracturas en rocas y líneas de cortante en suelos y metales. El estudio del problema de localización de deformaciones en vigas ha llevado al desarrollo de modelos matemáticos avanzados, los cuales incluyen el comportamiento no lineal del material, por ejemplo: Bazant y Kazemi (1994), Sanjayan y Darvall (1995), Bazant y Jirásek (1996), Jirásek (1997), Feng *et al.* (2017), entre otros.

El modelo de discontinuidades interiores, presentado originalmente por Simo *et al.* (1993) y Simo y Oliver (1994), representa adecuadamente el proceso de falla del material en sólidos mediante saltos de desplazamiento. En este modelo, la localización de las deformaciones se concentra en una línea o superficie con cierto espesor para problemas bidimensionales y tridimensionales, respectivamente. Este modelo ha motivado el desarrollo y aplicaciones a elementos finitos sólidos con discontinuidades interiores, por ejemplo, Ortíz *et al.* (1987), Simo y Rifai (1990), Simo *et al.* (1993), Simo y Oliver (1994), Juárez-Luna y Ayala (2014), entre otros. Asimismo, a partir de este modelo se han desarrollado elementos finitos viga o viga-columna con discontinuidades interiores que ablandan, por ejemplo: Ehrlich y Armero (2004), Nanakorn (2004), Armero y Ehrlich (2006), Dujc *et al.* (2010), Juárez-Luna y Ayala (2012), Jukic *et al.* (2013), Bui *et al.* (2014), Bitar *et al.* (2018), Juárez-Luna y Tenorio-Montero (2019), Bitar *et al.* (2019), Tenorio-Montero y Juárez-Luna (2021), entre otros. Estas formulaciones, entre otras no presentadas aquí, pueden resolverse con los métodos convencionales de cálculo de variaciones. Sin embargo, debido a la complejidad de resolverlos, se han aproximado utilizando el método de los elementos finitos.

Aunque las soluciones en forma cerrada se desarrollan para problemas particulares, estas soluciones proporcionan un mejor entendimiento del problema físico en estudio. Se han desarrollado soluciones en forma cerrada con discontinuidades, por ejemplo: Yavari *et al.* (2000), Yavari y Sarkani (2001), Falsone (2002), Biondi y Caddemi (2005), Juárez-Luna *et al.* (2021), entre otros. La mayoría de estas discontinuidades están asociadas a cargas concentradas, variaciones abruptas de la sección transversal o del módulo de Young, resortes rotacionales, saltos en barras

a tensión, entre otros casos. En este artículo se presenta el desarrollo y la aplicación de soluciones en forma cerrada de vigas con discontinuidades que modelan el proceso de falla del material debido a la concentración de deformaciones. Se presentan las formulaciones variacionales de vigas delgadas y gruesas con discontinuidades que ablandan, cuyas primeras variaciones dan lugar a los problemas de valores en la frontera. Estas formulaciones, originalmente desarrolladas por Martínez-Miranda y Juárez-Luna (2021), se fundamentan en el modelo de discontinuidades interiores fuertes, en el que el proceso de falla del material se concentra en una línea o superficie de espesor cero. Las soluciones en forma cerradas desarrolladas se obtienen principalmente integrando las ecuaciones diferenciales del problema de valores en la frontera. Las posibles dislocaciones o articulaciones, desarrolladas en las vigas durante el proceso de falla del material, se incluyen en la cinemática del modelo de discontinuidades interiores.

El contenido de este artículo es como se describe a continuación. En la sección 2, se describe la cinemática del modelo de discontinuidades interiores para vigas. En la sección 3, se dan los modelos constitutivos de vigas con discontinuidades, que describen el comportamiento de la falla del material. En la sección 4, se desarrollan formulaciones variacionales de vigas con discontinuidades que ablandan. En la Sección 5, se desarrollan el problema de valores en la frontera y soluciones en forma cerrada para la localización de curvatura y / o deformación por cortante en vigas que ablandan. En la sección 6, se presenta la aplicación de soluciones en forma cerrada a ejemplos prácticos modelados numéricamente. Finalmente, en la Sección 7 se dan las conclusiones derivadas de este trabajo.

## 2 Cinemática de vigas con discontinuidades

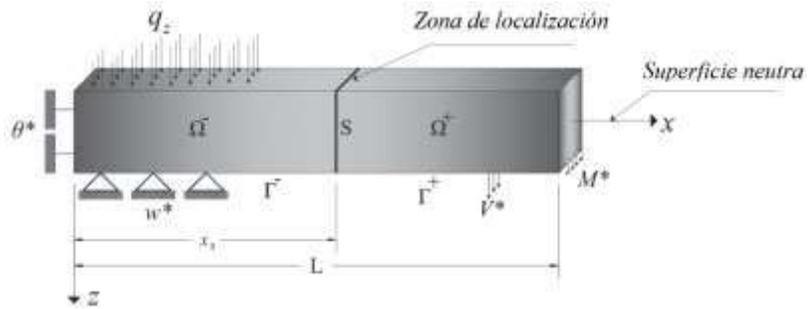
En el modelo de discontinuidades interiores fuertes se enriquece la cinemática del campo de desplazamientos al introducir un salto (discontinuidad) en una zona de localización de espesor cero, con lo que se caracteriza el comportamiento inelástico del material. Con este campo de desplazamiento discontinuo se produce un campo de deformación no acotado, en el que se presenta una singularidad. En este modelo, adaptado a elementos viga, se incluye el comportamiento inelástico del material por la presencia de un salto de rotación (articulación) y / o un salto de desplazamiento transversal (dislocación). La presencia de ambos, salto de rotación y salto de desplazamiento transversal, está relacionada con la teoría de vigas gruesas, mientras la presencia únicamente del salto de rotación está relacionada con la teoría de vigas delgadas.

### 2.1 Vigas delgadas con discontinuidades

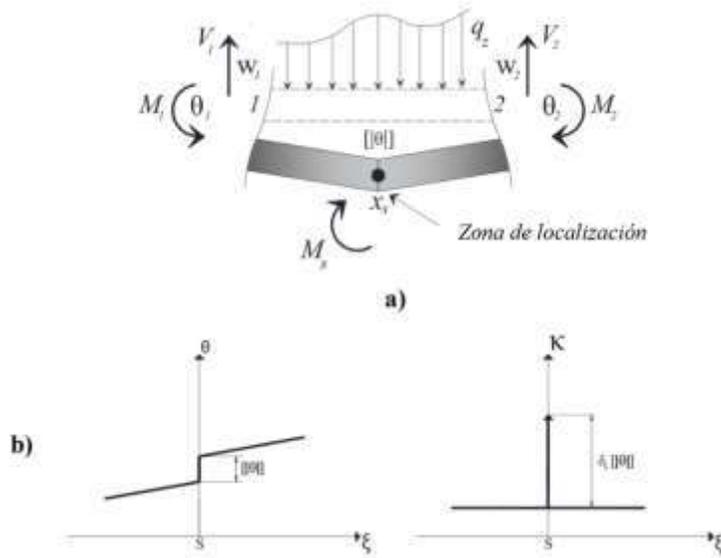
Considere una viga prismática de un sólido tridimensional reducido a una longitud unidimensional de referencia definida como un dominio acotado abierto  $\Omega \in \mathbb{R}$ , cargada hasta que presenta un salto desplazamiento  $[[\mathbf{u}]]$ , a través de una superficie  $S$ . Por lo tanto, el dominio  $\Omega = \Omega^- \cup \Omega^+ \cup S$  y la frontera  $\Gamma = \Gamma^- \cup \Gamma^+$ , ver Figura 1.

En la zona de localización  $S$ , donde se concentran deformaciones inelásticas, inicia con la formación de vacíos, que progresivamente se convierten en una discontinuidad macroscópica que ablanda. Para la teoría de vigas delgadas, esta discontinuidad se modela como una articulación, donde el comportamiento del material se describe con una relación constitutiva no lineal esfuerzo-deformación. El

material que está alrededor de la discontinuidad se descarga y se describe mediante un modelo constitutivo elástico-lineal. El desarrollo de una articulación en  $x_s$  está representado por un salto de rotación  $[[\theta]]$ , ver Figura 2.



**Figura 1.** Viga con una zona de localización en S



**Figura 2.** Salto de rotación  $[[\theta]]$ : a) articulación y b) rotación y curvatura

En la cinemática de vigas con discontinuidades fuertes, la rotación discontinua,  $\theta(x, t)$ , con  $[[\theta]]$  en S, está dado por:

$$\theta(x, t) = \bar{\theta}(x, t) + H(x_s)[[\theta]] \tag{1}$$

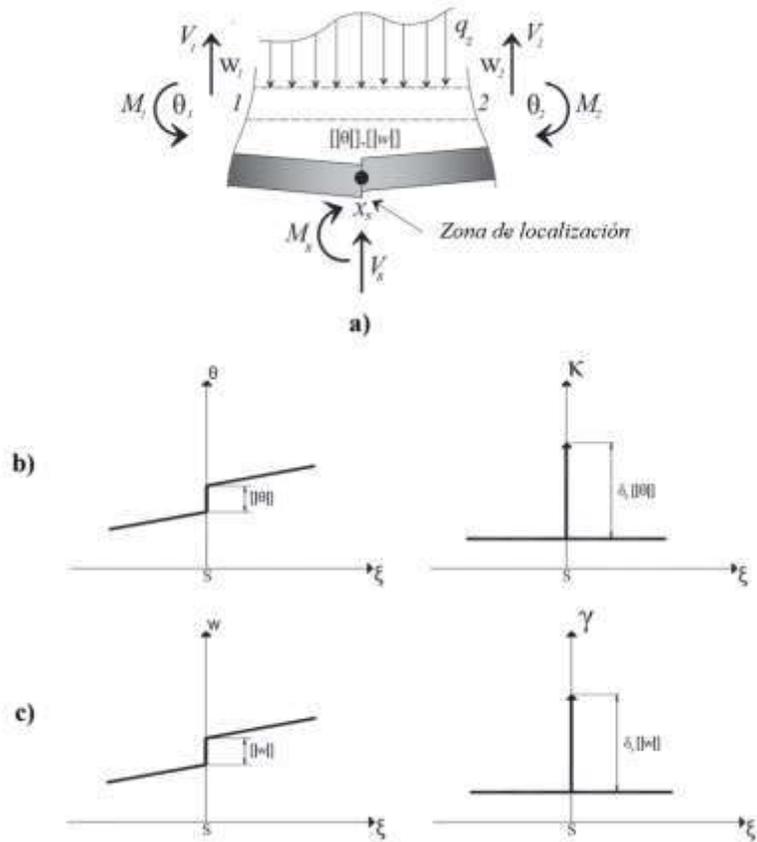
donde,  $\bar{\theta}(x, t)$  es la parte continua de la rotación; por lo tanto, la curvatura es:

$$\kappa^\theta(x, t) = \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\theta}(x, t)}{\partial x} + \delta(x_s)[[\theta]] = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \delta(x_s)[[\theta]] = \bar{\kappa}^w + \tilde{\kappa}^{[[\theta]]} \tag{2}$$

donde,  $H(x_s)$  es la función de Heaviside definida en S ( $H(x) = 0 \forall x \in \Omega^-$  y  $H(x) = 1 \forall x \in \Omega^+$ ) y  $\delta(x_s)$  es la función delta de Dirac.  $\bar{\kappa}^w$  está definida en  $\Omega^-$  y  $\Omega^+$ , y  $\tilde{\kappa}^{[[\theta]]}$  está definida en S.

### 2.2 Vigas gruesas con discontinuidades

En el caso de la teoría de vigas gruesas, se considera tanto la deformaciones inducidas por flexión como por cortante; por tanto, la discontinuidad que se desarrolla en la viga se presenta como una articulación y/o una dislocación, donde el comportamiento del material se describe con una relación constitutiva no lineal esfuerzo-deformación. El material alrededor de la discontinuidad se descarga y se describe mediante un modelo constitutivo elástico-lineal. El desarrollo de una articulación y/o una dislocación en  $x_s$  está representado por  $[[\theta|]$ , un salto de desplazamiento transversal  $[[w|]$  o una combinación de ambos, ver Figura 3.



**Figura 3.** Saltos de rotación y desplazamiento transversal: a) articulación y dislocación, b) rotación y curvatura, y c) desplazamiento transversal y deformación por cortante

En la cinemática de vigas gruesas con discontinuidades fuertes, el desplazamiento transversal discontinuo,  $w(x, t)$ , y  $\theta(x, t)$ , con sus correspondientes saltos  $[[\theta|]$  y  $[[w|]$  en  $S$ , están dados por:

$$w(x, t) = \bar{w}(x, t) + H(x_s)[[w|] \tag{3}$$

$$\theta(x, t) = \bar{\theta}(x, t) + H(x_s)[[\theta|] \tag{4}$$

donde,  $\bar{w}(x, t)$  es la parte continua del desplazamiento transversal; por lo tanto, la curvatura,  $\kappa^\theta$ , y la deformación por cortante,  $\gamma^{w,\theta}$ , son respectivamente:

$$\kappa^\theta(x, t) = \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \bar{\theta}(x, t)}{\partial x} + \delta(x_s)[|\theta|] = \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \delta(x_s)[|\theta|] = \bar{\kappa}^\theta + \tilde{\kappa}^{[|\theta|]} \tag{5}$$

$$\gamma^{w,\theta}(x, t) = \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} - \theta(x, t) = \frac{\partial \bar{w}(x, t)}{\partial x} - \bar{\theta}(x, t) + \delta(x_s)[|w|] - H(x_s)[|\theta|] = \bar{\gamma}^{w,\theta} + \tilde{\gamma}^{[|w|,|\theta|]} \tag{6}$$

La curvatura continua,  $\bar{\kappa}^\theta$ , y las deformaciones por cortante continuas,  $\bar{\gamma}^{w,\theta}$ , están definidas en  $\Omega^-$  y  $\Omega^+$ , mientras la curvatura no acotada,  $\tilde{\kappa}^{[|\theta|]}$ , y las deformaciones por cortante no acotadas,  $\tilde{\gamma}^{[|w|,|\theta|]}$ , están definidas en  $S$ .

### 3 Modelos constitutivos de vigas con discontinuidades

Las relaciones constitutivas continuas para vigas se definen con base en la densidad de energía libre de momento (ver Figura 4), dada a partir de la relación momento-curvatura ( $M - \kappa$ ), que se define como:

$$\Psi^M(\kappa) = \int_0^\kappa M(\kappa) d\kappa \tag{7}$$

Así como de la densidad de energía libre de cortante (ver Figura 4), dada a partir de la relación fuerza cortante-deformación por cortante ( $V - \gamma$ ), la cual está definida como:

$$\Psi^V(\gamma) = \int_0^\gamma V(\gamma) d\gamma \tag{8}$$

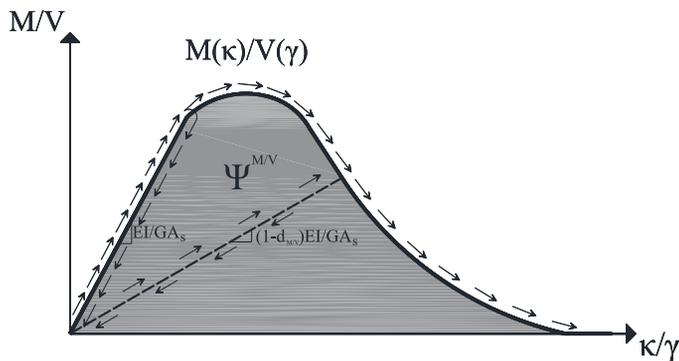


Figura 4. Densidad de energía libre bajo la curva  $M/V - \kappa/\gamma$

El momento,  $M$ , y la fuerza cortante,  $V$ , están definidos a partir de las ecuaciones (7) y (8), respectivamente, como:

$$M(\kappa) = \frac{\partial \Psi^M(\kappa)}{\partial \kappa} \tag{9}$$

$$V(\bar{\gamma}) = \frac{\partial \Psi^V(\bar{\gamma})}{\partial \bar{\gamma}} \quad (10)$$

Cuando en la viga no se ha presentado algún daño, las relaciones  $M - \bar{\kappa}$  y  $V - \bar{\gamma}$ , se consideran con un comportamiento elástico-lineal. En consecuencia, estos modelos se definen, respectivamente, como:

$$M(\bar{\kappa}) = \frac{\partial M(\bar{\kappa})}{\partial \bar{\kappa}} \bar{\kappa} = EI\bar{\kappa} = EI \frac{\partial^2 \bar{w}(x,t)}{\partial x^2} \quad (11)$$

$$V(\bar{\gamma}) = \frac{\partial V(\bar{\gamma})}{\partial \bar{\gamma}} \bar{\gamma} = GA_s \bar{\gamma} = Gk_s A \left( \frac{\partial \bar{w}(x,t)}{\partial x} - \bar{\theta}(x,t) \right) \quad (12)$$

donde,  $E$  es el módulo de elasticidad o módulo de Young,  $I$  es la inercia de la sección transversal,  $G$  es el módulo a cortante,  $A$  es el área de la sección transversal, y  $k_s$  es un factor que modifica el área de la sección transversal a área de cortante efectiva  $A_s$ . Por lo tanto, la densidad de energía libre de momento y la densidad de energía libre de cortante están dadas, respectivamente, como:

$$\Psi^M(\bar{\kappa}) = \int_0^{\bar{\kappa}} EI\bar{\kappa} d\bar{\kappa} = \frac{1}{2} EI\bar{\kappa}^2 = \frac{1}{2} EI \left( \frac{\partial^2 \bar{w}(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 \quad (13)$$

$$\Psi^V(\bar{\gamma}) = \int_0^{\bar{\gamma}} GA_s \bar{\gamma} d\bar{\gamma} = \frac{1}{2} GA_s \bar{\gamma}^2 = \frac{1}{2} Gk_s A \left( \frac{\partial \bar{w}(x,t)}{\partial x} - \bar{\theta}(x,t) \right)^2 \quad (14)$$

La descripción de las propiedades físicas de vigas, en la zona de localización,  $x_s$ , se desarrolla con base en modelos constitutivos estándar, introduciendo una variable de daño  $d_{MV}$ , que cuantifica el daño ocurrido en el continuo. Para este modelo, las ecuaciones de la relación  $M_S - \bar{\kappa}$  y la relación  $V_S - \bar{\gamma}$  se expresan, respectivamente, como:

$$M_S(\bar{\kappa}) = (1 - d_M) EI\bar{\kappa} = (1 - d_M) EI \frac{\partial [|\theta|](x,t)}{\partial x} \quad (15)$$

$$V_S(\bar{\gamma}) = (1 - d_V) GA_s \bar{\gamma} = (1 - d_V) Gk_s A \left( \frac{\partial \bar{w}(x,t)}{\partial x} - [|\theta|](x,t) \right) \quad (16)$$

donde,  $\bar{w}$  es el desplazamiento transversal inelástico y  $d_{MV}$  es una variable de daño escalar definida en términos de una regla de ablandamiento a través de una relación entre la variable de ablandamiento  $q_{MV}$  y la variable interna  $r_{MV}$ , la cual está dada como:

$$d_{M/V} = 1 - \frac{q_{M/V}}{r_{M/V}}; q_{M/V} \in [r_{0M/V}, 0], d_{M/V} \in [0, 1], r_{M/V} \in [0, \infty] \quad (17)$$

Cuando la variable de daño es cero, el material tiene un comportamiento elástico-lineal. Si la variable de daño es mayor que cero, el material tiene un comportamiento inelástico debido a la degradación de las propiedades del material. Si una variable de daño es igual a uno, el continuo no tiene la capacidad de transmitir cargas. La regla de ablandamiento está definida a partir de la dependencia entre  $q_{M/V}$  y  $r_{M/V}$ . Esta relación, la cual depende del módulo de ablandamiento continuo,  $H_{M/V}$ , está expresada como:

$$\dot{q}_{M/V} = H_{M/V}(r) \dot{r}_{M/V}; H_{M/V}(r_{M/V}) = q'_{M/V}(r_{M/V}) \quad (18)$$

#### 4 Formulación variacional de vigas con discontinuidades

La formulación variacional para vigas toma en cuenta una función Lagrangiana que, para cargas cuasi-estáticas, se define como:

$$\mathcal{L} = - \sum_{i=1}^n U_i(x) \quad (19)$$

donde,  $U_i$  es la energía potencial  $i$  en el problema físico, la cual está dada como:

$$\sum_{i=1}^n U_i(x) = - \sum_{i=1}^n \int_{x_0}^x F_i(x) \cdot dx \quad (20)$$

La energía potencial se define como el opuesto del trabajo hecho por el esfuerzo o fuerza  $F_i$ , si la partícula estudiada se mueve desde un punto de referencia  $x_0$  a un punto de interés  $x$ , con respecto a un esfuerzo o desplazamiento asociado  $x$ .

La integral tiempo-volumen de las ecuaciones (19) y (20), da como resultado el funcional de energía siguiente:

$$\Pi = \int_{t_0}^t \int_{\Omega} \mathcal{L} d\Omega dt = \int_{t_0}^t \int_{\Omega} \int_{x_0}^x \sum_{i=1}^n F_i(x) \cdot dx d\Omega dt \quad (21)$$

##### 4.1 Vigas delgadas con discontinuidades

La energía mecánica total de vigas delgadas idealizadas con el modelo de discontinuidades interiores se obtiene de las energías potenciales,  $U_i$ , que se presentan en  $\Omega^-$ ,  $\Omega^+$  y  $S$ . La energía potencial para un comportamiento elástico lineal en  $\Omega^-$  y  $\Omega^+$ , se deduce de la relación constitutiva momento-curvatura definida en la ecuación (11), la cual se expresa como:

$$U_1(\bar{\kappa}) = \Psi^M(\bar{\kappa}) = - \int_0^{\bar{\kappa}} -EI\bar{\kappa} d\bar{\kappa} = \frac{1}{2} EI\bar{\kappa}^2 = \frac{1}{2} EI \left( \frac{\partial^2 \bar{w}(x)}{\partial x^2} \right)^2 \quad (22)$$

Las energías potenciales que incluyen las fuerzas de cuerpo y cargas externas están dadas, respectivamente, como:

$$U_2(\bar{w}) = - \int_{\bar{w}_0=0}^{\bar{w}} \rho_l g d\bar{w} = - \rho_l g \bar{w}(x) \tag{23}$$

$$U_3(\bar{w}) = - \int_{\bar{w}_0=0}^{\bar{w}} q_z d\bar{w} = - q_z(x) \bar{w}(x) \tag{24}$$

La energía potencial asociada al comportamiento no lineal del material en  $S$ , que se deduce a partir de la relación constitutiva momento-curvatura en la ecuación (15), se expresa como:

$$U_4(\bar{\kappa}) = - \int_0^{\bar{\kappa}} (1-d_M) E I \bar{\kappa} d\bar{\kappa} = \frac{1}{2} (1-d_M) E I \bar{\kappa}^2 = \frac{1}{2} (1-d_M) E I \left( \frac{\partial[|\theta|](x)}{\partial x} \right)^2 \tag{25}$$

Al sustituir las ecuaciones (22), (23), (24) y (25) en la ecuación (21), da como resultado el funcional que representa la formulación variacional de vigas delgadas con discontinuidades, el cual se expresa como:

$$\begin{aligned} \Pi(\bar{w}, [|\theta|]) = & - \int_{\Omega^{+/-}} \frac{1}{2} E I \left( \frac{\partial^2 \bar{w}(x)}{\partial x^2} \right)^2 d\Omega^{+/-} + \int_{\Omega^{+/-}} \rho_l g \bar{w}(x) d\Omega^{+/-} + \int_{\Omega^{+/-}} q_z(x) \bar{w}(x) d\Omega^{+/-} \\ & - \int_{\Omega^S} \frac{1}{2} (1-d_M) E I \left( \frac{\partial[|\theta|](x)}{\partial x} \right)^2 ds \end{aligned} \tag{26}$$

Al considerar las fuerzas de cuerpo en las cargas externas,  $\rho_l g + q_z(x, t) \equiv q(x, t)$ , y recordando que la rotación es el gradiente de los desplazamientos transversales, la ecuación (26) se reescribe como:

$$\Pi(\bar{w}, \hat{w}) = - \int_{\Omega^{+/-}} \frac{1}{2} E I \left( \frac{\partial^2 \bar{w}(x)}{\partial x^2} \right)^2 d\Omega^{+/-} + \int_{\Omega^{+/-}} q(x) \bar{w}(x) d\Omega^{+/-} - \int_{\Omega^S} \frac{1}{2} (1-d_M) E I \left( \frac{\partial^2 \hat{w}(x)}{\partial x^2} \right)^2 ds \tag{27}$$

donde,  $\Omega^{+/-}$  es el dominio donde el material tiene un comportamiento elástico-lineal y  $S$  es el dominio donde las deformaciones inelásticas se concentran.

Con la finalidad de que el término definido como una integral de superficie en la ecuación (27) sea considerado una integral en todo volumen, se hace uso la función delta de Dirac  $\delta(x)$  (Dirac, 1958), la cual permite tratar matemáticamente la integral de superficie como a una integral de volumen, a partir de la expresión siguiente:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \epsilon(x) \delta(x_s) dx = \int_0^l \epsilon(x) \delta(x_s) dx = \epsilon_s; \forall x_s \in [0, l] \tag{28}$$

donde,  $\epsilon$  se considera como un valor no acotado especial en  $x_s$ .

Con fundamento en la ecuación (28), la integral de superficie, dada en el último término de la ecuación (27), se expresa como una integral de volumen al generalizar el problema unidimensional a un problema tridimensional. En consecuencia, del funcional de la ecuación (27) y asumiendo que el dominio  $\Omega^{+/-}$  tiende a  $\Omega$ , se obtiene el funcional que representa la formulación variacional propuesta de vigas delgadas con discontinuidades, el cual se expresa como:

$$\Pi(\bar{w}, \bar{w}) = \int_L \frac{1}{2} EI \left( \frac{\partial^2 \bar{w}(x)}{\partial x^2} \right)^2 dx - \int_L q(x) \bar{w}(x) dx + \int_L \frac{1}{2} (1 - d_M) EI \left( \frac{\partial^2 \bar{w}(x)}{\partial x^2} \right)^2 \delta(x_s) dx \quad (29)$$

#### 4.2 Vigas gruesas con discontinuidades

La formulación variacional de vigas gruesas con discontinuidades, además de tomar en cuenta la energía de deformación inducida por flexión, considera la energía de deformación inducida por la fuerza cortante. La energía potencial asociada al comportamiento elástico-lineal del material en  $\Omega^-$  y  $\Omega^+$ , que se deduce de la relación constitutiva momento-curvatura y fuerza cortante-deformación por cortante, dadas en las ecuaciones (11) y (12), respectivamente, son expresadas como:

$$U_{1r}(\bar{\kappa}) = \Psi^M(\bar{\kappa}) = - \int_0^{\bar{\kappa}} -EI \bar{\kappa} d\bar{\kappa} = \frac{1}{2} EI \bar{\kappa}^2 = \frac{1}{2} EI \left( \frac{\partial \bar{\theta}(x)}{\partial x} \right)^2 \quad (30)$$

$$U_{2r}(\bar{\gamma}) = - \int_{\bar{\gamma}_0=0}^{\bar{\gamma}} -GA_s \bar{\gamma} d\bar{\gamma} = \frac{1}{2} GA_s \bar{\gamma}^2 = \frac{1}{2} Gk_s A \left( \frac{\partial \bar{w}(x)}{\partial x} - \bar{\theta}(x) \right)^2 \quad (31)$$

Las energías potenciales asociadas al comportamiento no lineal del material en  $S$ , que se deducen a partir de las relaciones constitutivas momento-curvatura y fuerza cortante-deformación por cortante, dadas en las ecuaciones (15) y (16), respectivamente, son:

$$U_{3r}(\bar{\kappa}) = - \int_0^{\bar{\kappa}} -(1 - d_M) EI \bar{\kappa} d\bar{\kappa} = \frac{1}{2} (1 - d_M) EI \bar{\kappa}^2 = \frac{1}{2} (1 - d_M) EI \left( \frac{\partial [|\theta|](x)}{\partial x} \right)^2 \quad (32)$$

$$U_{4r}(\bar{\gamma}) = - \int_0^{\bar{\gamma}} -(1 - d_r) GA_s \bar{\gamma} d\bar{\gamma} = \frac{1}{2} (1 - d_r) GA_s \bar{\gamma}^2 = \frac{1}{2} (1 - d_r) Gk_s A \left( \frac{\partial \bar{w}(x)}{\partial x} - [|\theta|](x) \right)^2 \quad (33)$$

Al sustituir las ecuaciones (23), (24), (30), (31), (32) y (33) en la ecuación (21), da como resultado el funcional que representa la formulación variacional de vigas gruesas con discontinuidades, el cual se expresa como:

$$\begin{aligned} \Pi(\bar{w}, \bar{\theta}, \bar{w}, [|\theta|]) = & - \int_{\Omega^{+/-}} \frac{1}{2} EI \left( \frac{\partial \bar{\theta}(x)}{\partial x} \right)^2 d\Omega^{+/-} - \int_{\Omega^{+/-}} \frac{1}{2} Gk_s A \left( \frac{\partial \bar{w}(x)}{\partial x} - \bar{\theta}(x) \right)^2 d\Omega^{+/-} \\ & + \int_{\Omega^{+/-}} \rho_l g \bar{w}(x) d\Omega^{+/-} + \int_{\Omega^{+/-}} q_z(x) \bar{w}(x) d\Omega^{+/-} - \int_{\Omega^s} \frac{1}{2} (1 - d_M) EI \left( \frac{\partial [|\theta|](x)}{\partial x} \right)^2 dS \\ & - \int_{\Omega^s} \frac{1}{2} (1 - d_r) Gk_s A \left( \frac{\partial \bar{w}(x)}{\partial x} - [|\theta|](x) \right)^2 dS \end{aligned} \quad (34)$$

Al considerar las fuerzas de cuerpo en las cargas externas,  $\rho_l g + q_z(x, t) \equiv q(x, t)$ , la ecuación (34) se reescribe como:

$$\begin{aligned} \pi(\bar{w}, \bar{\theta}, \bar{w}, [|\theta|]) = & - \int_{\Omega^{+/-}} \frac{1}{2} EI \left( \frac{\partial \bar{\theta}(x)}{\partial x} \right)^2 d\Omega^{+/-} - \int_{\Omega^{+/-}} \frac{1}{2} Gk_s A \left( \frac{\partial \bar{w}(x)}{\partial x} - \bar{\theta}(x) \right)^2 d\Omega^{+/-} \\ & + \int_{\Omega^{+/-}} q(x) \bar{w}(x) d\Omega^{+/-} - \int_{\Omega^s} \frac{1}{2} (1 - d_M) EI \left( \frac{\partial [|\theta|](x)}{\partial x} \right)^2 dS \\ & - \int_{\Omega^s} \frac{1}{2} (1 - d_V) Gk_s A \left( \frac{\partial \bar{w}(x)}{\partial x} - [|\theta|](x) \right)^2 dS \end{aligned} \quad (35)$$

Asumiendo que el dominio  $\Omega^{+/-}$  tiende a  $\Omega$  e incluyendo las deducciones de la ecuación (28) en la ecuación (35), se obtiene el funcional que representa la formulación variacional propuesta de vigas gruesas con discontinuidades, el cual se expresa como:

$$\begin{aligned} \pi(\bar{w}, \bar{\theta}, \bar{w}, [|\theta|]) = & \int_L \frac{1}{2} EI \left( \frac{\partial \bar{\theta}(x)}{\partial x} \right)^2 dx + \int_L \frac{1}{2} Gk_s A \left( \frac{\partial \bar{w}(x)}{\partial x} - \bar{\theta}(x) \right)^2 dx - \int_L q(x) \bar{w}(x) dx \\ & + \int_L \frac{1}{2} (1 - d_M) EI \left( \frac{\partial [|\theta|](x)}{\partial x} \right)^2 \delta(x_s) dx + \int_L \frac{1}{2} (1 - d_V) Gk_s A \left( \frac{\partial \bar{w}(x)}{\partial x} - [|\theta|](x) \right)^2 \delta(x_s) dx \end{aligned} \quad (36)$$

## 5 Soluciones en forma cerrada de vigas con discontinuidades

### 5.1 Vigas delgadas con discontinuidades

El funcional dado en la ecuación (29) tiene un valor estacionario a partir del sistema de ecuaciones de Euler y la ecuación de Euler-Poisson (Krasnov *et al.*, 2002), el cual se expresa como:

$$\mathcal{L}_{y_i} - \frac{d}{dx} (\mathcal{L}_{y_i'}) + \frac{d^2}{dx^2} (\mathcal{L}_{y_i''}) - + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} (\mathcal{L}_{y_i^{(n)}}) = 0, i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (37)$$

donde,  $\mathcal{L}$  es la función Lagrangiana e  $y_i$  es la variable independiente  $i$ .

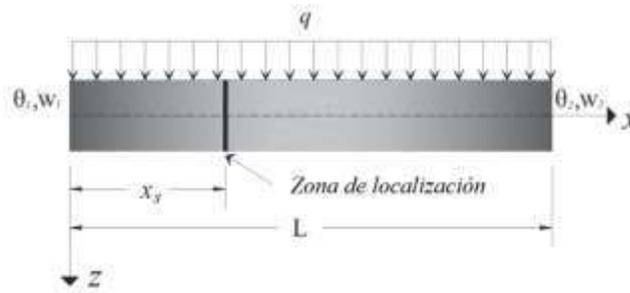
Al sustituir el funcional de la ecuación (29) en la ecuación (37), se obtienen las ecuaciones diferenciales que definen el problema de una viga delgada con discontinuidades, las cuales se expresan como:

$$EI \frac{\partial^4 \bar{w}(x)}{\partial x^4} = q(x) \quad (38)$$

$$(1 - d_M) EI \frac{\partial^2 \bar{w}(x)}{\partial x^2} \delta'(x_s) + 2(1 - d_M) EI \frac{\partial^3 \bar{w}(x)}{\partial x^3} \delta'(x_s) + (1 - d_M) EI \frac{\partial^4 \bar{w}(x)}{\partial x^4} \delta(x_s) = 0 \quad (39)$$

A partir de las ecuaciones diferenciales (38) y (39) se obtienen soluciones en forma cerrada para distintas condiciones de frontera. Por lo tanto, en este trabajo se desarrolla la solución en términos de constantes de integración, para que posteriormente sean evaluadas y aplicadas a problemas prácticos de vigas con discontinuidades que ablandan.

Considere una viga delgada sometida a una carga distribuida  $q(x) = q$ , con condiciones de frontera  $w_1, \theta_1, w_2$  y  $\theta_2$  (ver Figura 5), la cual tiene la presencia de una zona de localización en  $x_s$ . La viga se modela sobre una superficie neutra en el plano principal de flexión. Las coordenadas locales están dadas por  $x \in [0, L]$  a lo largo de su eje longitudinal. La viga tiene un área  $A$ , inercia  $I$ , módulo de elasticidad  $E$  y longitud  $L$ .



**Figura 5.** Viga con condiciones de frontera con una zona de localización en  $x_s$

Las soluciones en forma cerrada de  $\bar{w}$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $V$  y  $M$  en el dominio elástico-lineal  $\Omega^{+/-}$  se obtienen al resolver la ecuación (38), las cuales son ampliamente conocidas. No obstante,  $\tilde{w}(x)$  y  $[|\theta|]$  en la zona de localización inelástica  $S$ , se obtienen al resolver la ecuación diferencial dada en (39). Para el caso de regla de ablandamiento lineal, el módulo de ablandamiento continuo de momento,  $H_M$ , es constante, ya que la pendiente en la parte descendente es la derivada de una función lineal. Por lo tanto, el modelo de daño constitutivo de  $M_S - \bar{\kappa}$  para el modelo de discontinuidades interiores fuertes, está dado por (Juárez-Luna y Ayala, 2012):

$$M_S = H_M EI [|\theta|] \delta(x_s) \quad (40)$$

Por lo tanto, la ecuación (39) se reescribe como:

$$H_M EI \frac{\partial^2 \tilde{w}(x)}{\partial x^2} \delta'(x_s) + 2H_M EI \frac{\partial^3 \tilde{w}(x)}{\partial x^3} \delta'(x_s) + H_M EI \frac{\partial^4 \tilde{w}(x)}{\partial x^4} \delta(x_s) = 0 \quad (41)$$

La solución de la ecuación diferencial (41), se obtiene a partir de integración directa e integración por partes, de tal forma que:

$$H_M EI \frac{\partial^3 \tilde{w}(x)}{\partial x^3} \delta(x_s) + H_M EI \frac{\partial^2 \tilde{w}(x)}{\partial x^2} \delta'(x_s) + C_5 = 0 \quad (42)$$

$$H_M EI \frac{\partial^2 \tilde{w}(x)}{\partial x^2} \delta(x_s) + C_5 x + C_6 = 0 \quad (43)$$

$$H_M EI [|\theta|] \delta(x_s) + \frac{C_5 x^2}{2} + C_6 x + C_7 = 0 \quad (44)$$

$$H_M EI \tilde{w}(x) \delta(x_s) + \frac{C_5 x^3}{6} + \frac{C_6 x^2}{2} + C_7 x + C_8 = 0 \quad (45)$$

Las constantes de integración en las ecuaciones (42) y (43) se obtiene a partir de las condiciones de frontera de las ecuaciones (46) y (47).

$$\underbrace{H_M EI \frac{\partial^2 \tilde{w}(x)}{\partial x^2} \delta'(x_s)}_0 + \underbrace{H_M EI \frac{\partial^3 \tilde{w}(x)}{\partial x^3} \delta(x_s)}_0 = 0 \quad (46)$$

$$\underbrace{H_M EI \frac{\partial^2 \tilde{w}(x)}{\partial x^2} \delta(x_s)}_0 = 0 \quad (47)$$

$C_7$  se deduce de las condiciones de frontera en (40) y  $C_8$  es cero, pues no hay desplazamientos producto de la curvatura inelástica, por lo tanto:

$$[|\theta|]\delta(x = x_s) \equiv \tilde{k} = \frac{M_S}{H_M EI} \tag{48}$$

$$\tilde{w}(x = x_s) = 0 \tag{49}$$

Evaluando de las ecuaciones (46) a (49) en las ecuaciones (42) a (45), se obtiene que  $[|\theta|]$  y  $\tilde{w}(x)$  son, respectivamente:

$$[|\theta|] = \frac{M_S}{\delta(x_s) H_M EI} \tag{50}$$

$$\tilde{w}(x) = \frac{M_S(x - x_s)}{\delta(x_s) H_M EI} = [|\theta|](x - x_s) \tag{51}$$

Para obtener momentos acotados a partir de una curvatura no acotada en la ecuación (50), es necesario la regularización de  $H_M$  con el espesor del ancho de banda  $k$ , como fue desarrollado por Oliver *et al.* (2002), tal que:

$$H_M = k\bar{H}_M \Rightarrow H_M \frac{1}{k} = H_M \delta(x_s) = \bar{H}_M \tag{52}$$

La regularización de  $H_M$  garantiza que la energía disipada dependa de la energía de fractura a flexión,  $G_{ff}$ , la cual se considera como una propiedad del material.  $\bar{H}_M$  es el módulo de ablandamiento discreto de momento para ablandamiento lineal, el cual también se considera como una propiedad del material. Por lo tanto,  $G_{ff}$  para un ablandamiento lineal, se define como:

$$G_{ff} = \frac{M_u^2}{2EI\bar{H}_M} \Rightarrow \bar{H}_M = \frac{M_u^2}{2EIG_{ff}} \tag{53}$$

Sustituyendo la ecuación (52) en la ecuación (50), se obtiene la relación constitutiva discreta entre  $[|\theta|]$  y  $M$ , con ablandamiento lineal como:

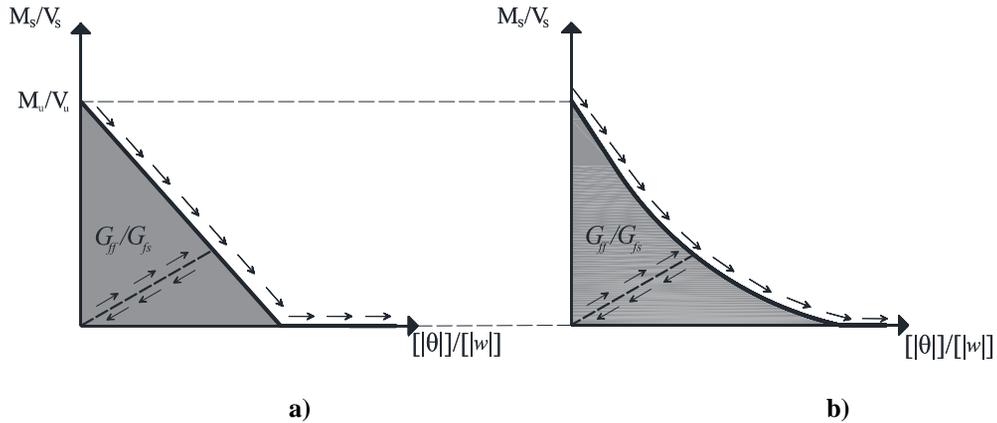
$$[|\theta|] = \frac{M_S}{\bar{H}_M EI} = \frac{M - M_u}{\bar{H}_M EI} \tag{54}$$

La solución para  $[|\theta|]$  expresada en la ecuación (54) considera una regla de ablandamiento lineal, por lo que para desarrollar una solución que considere un ablandamiento exponencial, se iguala el área bajo la curva del modelo constitutivo discreto con ablandamiento lineal, con la curva de ablandamiento exponencial (ver Figura 6). Por lo que la solución de  $[|\theta|]$ , considerando un ablandamiento exponencial, se expresa como:

$$[|\theta|] = \frac{M_u}{\bar{H}_{Me} EI} \text{Ln} \left( \frac{M_S}{M_u} + 1 \right) \tag{55}$$

donde, el módulo de ablandamiento discreto de momento para ablandamiento exponencial,  $\bar{H}_{Me}$ , se define como:

$$\bar{H}_{Me} = \frac{M_u^2}{EI G_{ff}} \tag{56}$$



**Figura 6.** Modelo constitutivo discreto: a ablandamiento lineal y b) ablandamiento exponencial

Las soluciones en forma cerrada ( $\bar{w}$  and  $\bar{\theta}$ ) en el dominio elástico-lineal  $\Omega^{+/-}$  y las ecuaciones (51) y (54) en  $S$ , dan como resultado las soluciones en forma cerrada para  $w(x)$  y  $\theta(x)$  en  $\Omega$ , de manera que:

$$w(x) = \frac{qx^4}{24EI} + \frac{C_1x^3}{6EI} + \frac{C_2x^2}{2EI} + \frac{C_3x}{EI} + \frac{C_4}{EI} + H(x_s)[|\theta|](x - x_s) \tag{57}$$

$$\theta(x) = \frac{qx^3}{6EI} + \frac{C_1x^2}{2EI} + \frac{C_2x}{EI} + \frac{C_3}{EI} + H(x_s)[|\theta|] \tag{58}$$

La fuerza cortante y momentos acotados están definidos, respectivamente, como:

$$M(x) = \frac{qx^2}{2} + C_1x + C_2 \tag{59}$$

$$V(x) = qx + C_1 \tag{60}$$

Las ecuaciones (57), (58), (59) y (60) se expresan en términos de constantes de integración que dependen de las condiciones de frontera. A partir de estas soluciones, Martínez-Miranda y Juárez-Luna (2021) desarrollaron soluciones para distintas condiciones de frontera de vigas delgadas con discontinuidades que ablandan, las cuales se presentan en la Tabla A 1.

### 5.2 Vigas gruesas con discontinuidades

El funcional de la ecuación (36) tiene un valor estacionario a partir del sistema de ecuaciones en (37), mediante el cual se obtienen las ecuaciones diferenciales

que definen el problema de una viga gruesa con discontinuidades, las cuales se expresan como:

$$-GA_s \left( \frac{\partial^2 \bar{w}(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial \bar{\theta}(x)}{\partial x} \right) = q(x) \quad (61)$$

$$EI \frac{\partial^2 \bar{\theta}(x)}{\partial x^2} = -GA_s \left( \frac{\partial \bar{w}(x)}{\partial x} - \bar{\theta}(x) \right) \quad (62)$$

$$(1-d_v)GA_s \left( \frac{\partial \tilde{w}(x)}{\partial x} - [|\theta|] \right) \delta'(x_s) + (1-d_v)GA_s \left( \frac{\partial^2 \tilde{w}(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial [|\theta|]}{\partial x} \right) \delta(x_s) = 0 \quad (63)$$

$$(1-d_M)EI \frac{\partial [|\theta|](x)}{\partial x} \delta'(x_s) + (1-d_M)EI \frac{\partial^2 [|\theta|](x)}{\partial x^2} \delta(x_s) = -(1-d_v)GA_s \left( \frac{\partial \tilde{w}(x)}{\partial x} - [|\theta|] \right) \delta(x_s) \quad (64)$$

$H_{MV}$  es constante para un ablandamiento lineal, por lo que las ecuaciones (63) y (64) se reescriben como:

$$H_V GA_s \left( \frac{\partial \tilde{w}(x)}{\partial x} - [|\theta|] \right) \delta'(x_s) + H_V GA_s \left( \frac{\partial^2 \tilde{w}(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial [|\theta|](x)}{\partial x} \right) \delta(x_s) = 0 \quad (65)$$

$$H_M EI \frac{\partial [|\theta|](x)}{\partial x} \delta'(x_s) + H_M EI \frac{\partial^2 [|\theta|](x)}{\partial x^2} \delta(x_s) = -H_V GA_s \left( \frac{\partial \tilde{w}(x)}{\partial x} - [|\theta|] \right) \delta(x_s) \quad (66)$$

A partir de las ecuaciones diferenciales (61), (62) (65) y (66) se obtienen soluciones en forma cerrada para distintas condiciones de frontera. Por lo tanto, en este trabajo se desarrolla la solución en términos de constantes de integración, para que posteriormente sean evaluadas y aplicadas a problemas prácticos de vigas con discontinuidades que ablandan.

Considere una viga gruesa sometida a una carga distribuida  $q(x) = q$ , con condiciones de frontera  $w_1, \theta_1, w_2$  y  $\theta_2$  (ver Figura 5), la cual tiene una zona de localización de deformaciones en  $x_s$ . La viga se modela sobre una superficie neutra en el plano principal de flexión. Las coordenadas locales están dadas por  $x \in [0, L]$  a lo largo de su eje longitudinal. La viga tiene un área  $A$ , inercia  $I$ , modulo elástico  $E$ , longitud  $L$ , modulo a cortante  $G$  y un factor,  $k_s$ , que modifica el área de la sección transversal a un área de cortante efectiva.

Las soluciones en forma cerrada de  $\bar{w}$ ,  $\bar{\theta}$ ,  $V$  y  $M$  en el dominio elástico-lineal  $\Omega^{+/-}$ , se obtienen al resolver las ecuaciones (61) y (62). Estas soluciones son ampliamente conocidas. Las soluciones en forma cerrada de  $\tilde{w}$  y  $[|\theta|]$  en  $S$ , se obtiene al resolver las ecuaciones diferenciales dadas en (65) y (66).

Integrando la ecuación (65), se obtiene:

$$H_V GA_s \left( \frac{\partial \tilde{w}(x)}{\partial x} - [|\theta|] \right) \delta(x_s) = C_5 \quad (67)$$

Al sustituir la ecuación (67) en la ecuación (66), e integrando la ecuación resultante, se obtiene:

$$H_M EI \frac{\partial^2 [|\theta|](x)}{\partial x^2} \delta(x_s) + H_M EI \frac{\partial [|\theta|](x)}{\partial x} \delta'(x_s) = -C_5 \quad (68)$$

$$H_M EI \frac{\partial [|\theta|](x)}{\partial x} \delta(x_s) = -C_5 x + C_6 \quad (69)$$

$$\bar{H}_M EI [|\theta|] = -\frac{C_5 x^2}{2} + C_6 x + C_7 \quad (70)$$

Evaluado las condiciones de frontera de las ecuaciones (46), (47) y (48) en las ecuaciones (68), (69) y (70),  $[|\theta|]$  es:

$$[|\theta|] = \frac{M_S}{H_M EI} \quad (71)$$

Al sustituir la ecuación (71) en la ecuación (67), se obtiene:

$$H_V GA_s \left( \frac{\partial \tilde{w}(x)}{\partial x} - H(x_s) \frac{M_S}{H_M EI} \right) \delta(x_s) = 0 \quad (72)$$

Note que la función de Heaviside se ha agregado a  $[|\theta|]$  en la ecuación (72), pues su posición modifica  $\tilde{w}$ . Esta ecuación es válida si:

$$\frac{\partial \tilde{w}(x)}{\partial x} - H(x_s) \frac{M_S}{H_M EI} = 0 \quad (73)$$

Por lo tanto, al integrar la ecuación (73), se obtiene que la solución de  $\tilde{w}$  en  $S$  es:

$$\tilde{w}(x) = H(x_s) \left( \frac{M_S}{H_M EI} \right) (x - x_s) + C_8 \quad (74)$$

Al evaluar  $\tilde{w}$  en la discontinuidad  $x_s$ ,  $\tilde{w}(x = x_s) = [w]$ , entonces:

$$C_8 = [w] \quad (75)$$

Sustituyendo la ecuación (75) en la ecuación (74), se obtiene que  $\tilde{w}(x)$  es:

$$\tilde{w}(x) = [|\theta|](x - x_s) + [w] \quad (76)$$

La relación entre  $[w]$  y la fuerza cortante en la discontinuidad,  $V_s$ , se deduce a partir de las ecuaciones (6) y (16) y la regularización del módulo de ablandamiento continuo de cortante  $H_V$ , llegando a:

$$[w] = \frac{V_s}{\bar{H}_V GA_s} = \frac{V - V_u}{\bar{H}_V GA_s} \quad (77)$$

donde, el módulo de ablandamiento discreto de cortante para ablandamiento lineal,  $\bar{H}_V$ , está dado como:

$$\bar{H}_V = \frac{V_u^2}{2 GA_s G_{fs}} \quad (78)$$

donde,  $G_{fs}$  es la energía de fractura a cortante.

La solución para  $[|w|]$  también se puede expresar en términos de una regla de ablandamiento exponencial, como fue desarrollado para  $[|\theta|]$  en la sección anterior (ver Figura 6), de tal manera que:

$$[|w|] = \frac{V_u}{\bar{H}_{Ve} GA_s} \ln \left( \frac{V_s}{V_u} + 1 \right) \quad (79)$$

donde, el módulo de ablandamiento discreto de cortante para ablandamiento exponencial  $\bar{H}_{Ve}$ , está dado por:

$$\bar{H}_{Ve} = \frac{V_u^2}{GA_s G_{fs}} \quad (80)$$

La soluciones en forma cerrada ( $\bar{w}$  y  $\bar{\theta}$ ) en el dominio elástico-lineal  $\Omega^{+/-}$ , y las ecuaciones (71) y (76) en  $S$ , dan como resultado las soluciones en forma cerrada para  $w(x)$  y  $\theta(x)$  en  $\Omega$ , de manera que::

$$w(x) = \frac{qx^4}{24EI} + \frac{C_1x^3}{6EI} + \frac{C_2x^2}{2EI} + \frac{C_3x}{EI} - \frac{1}{GA_s} \left( \frac{qx^2}{2} + C_1x \right) + C_4 + H_u(M)H(x_s)[|\theta|](x-x_s) + H_u(V)H(x_s)[|w|] \quad (81)$$

$$\theta(x) = \frac{qx^3}{6EI} + \frac{C_1x^2}{2EI} + \frac{C_2x}{EI} + \frac{C_3}{EI} + H_u(M)H(x_s)[|\theta|] \quad (82)$$

Las fuerzas cortantes y los momentos acotados están definidos, respectivamente, en las ecuaciones (59) y (60).

Las ecuaciones (81), (82), (59) y (60) se expresan en términos de constantes de integración, las cuales dependen de las condiciones de frontera. A partir de estas soluciones, Martínez-Miranda y Juárez-Luna (2021) desarrollaron soluciones para distintas condiciones de frontera de vigas gruesas con discontinuidades que ablandan, las cuales se presentan en la Tabla A 2.

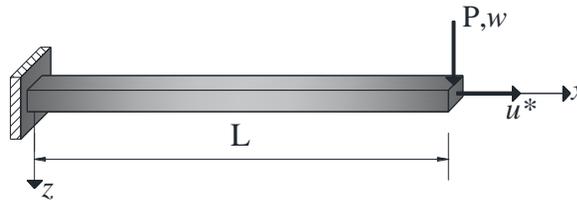
## 6 Aplicación a problemas de vigas con discontinuidades

Se han desarrollado distintos ejemplos prácticos de vigas con discontinuidades que ablandan, los cuales han sido modelados numéricamente. Estas soluciones aproximadas generalmente se desarrollan a partir del método de los elementos finitos. En esta sección se validan la precisión y eficiencia de las formulaciones variacionales propuestas, a partir del desarrollo y la aplicación de soluciones en forma cerrada de este tipo de ejemplos. Se presentan tres ejemplos de aplicación de vigas que presentan discontinuidades que ablandan, en los cuales se considera que el modelo constitutivo discreto tiene una regla de ablandamiento lineal, exponencial o ambas.

### 6.1 Falla progresiva de una viga en voladizo

En este ejemplo se estudia la falla progresiva de la viga en voladizo que se presenta en la Figura 7, cuya propuesta y solución numérica fue desarrollada por Wu (2013). La viga está sometida a un desplazamiento longitudinal prescrito,  $u^*$ ,

en el extremo libre de la viga, el cual se aplica y se mantiene fijo durante la aplicación de la carga posterior. Un desplazamiento transversal incremental,  $w$ , se impone en el extremo libre de la viga, hasta que se forma una discontinuidad que ablanda. Las propiedades mecánicas de la viga son:  $EA = 60$ ,  $GA_s = 20$ ,  $EI = 0.8$ , lo que corresponde a una sección transversal de  $b = 0.15$  y  $h = 0.40$ , con un módulo de elasticidad  $E = 1 \times 10^3$  y una relación de Poisson  $\nu = 0.275$ . La viga tiene una longitud  $L = 1$ , a la cual se le impone el desplazamiento longitudinal  $u^* = 0.1$ . La fuerza axial última se toma en cuenta como  $N_y = 15$ , el cortante último de  $V_y = 3$  y el momento último  $M_y = 1.5$ . La energía de fractura a flexión es  $G_{ff} = 7.5$  y la energía de fractura a cortante es  $G_{fs} = 7.5$ .

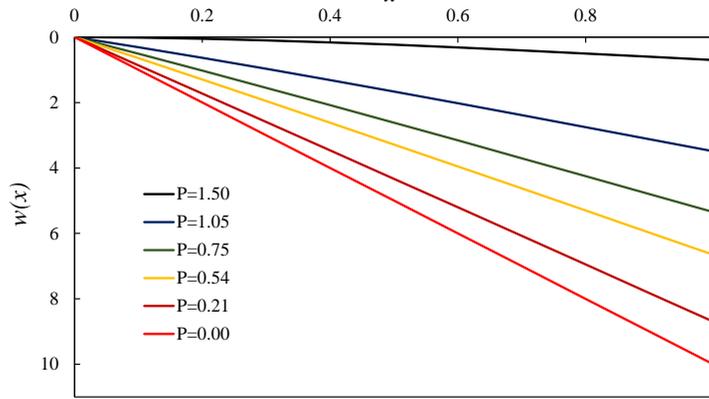


**Figura 7.** Viga en voladizo

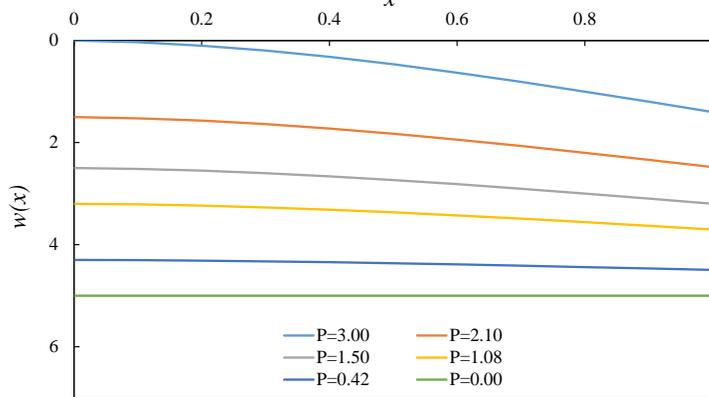
En este ejemplo se realizaron los primeros dos casos propuestos por Wu (2013). El primero consiste en imponer el desplazamiento transversal incremental en el extremo libre de la viga hasta que se desarrolla una articulación que ablanda, es decir que solo se presentan una falla por flexión. Por lo que se considera que no hay interacción entre la fuerza axial, cortante y momento. El segundo caso consiste en imponer el desplazamiento transversal incremental en el extremo libre de la viga hasta que se forma una dislocación que ablanda, es decir que solo se presenta una falla por cortante. Al igual que el primer caso, no hay interacción entre fuerza axial, cortante y momento. Para los dos casos se considera únicamente hipótesis de vigas gruesas, de la cual se deduce las soluciones resultantes para hipótesis de vigas delgadas. Debido a que en ambos casos no existe interacción entre los elementos mecánicos, el desplazamiento longitudinal impuesto no modifica el comportamiento del desplazamiento transversal que se obtiene al no considerar dicha fuerza. Por lo tanto, en este ejemplo se estudian únicamente los desplazamientos transversales, rotaciones, curvatura y deformaciones por cortante. El modelo constitutivo discreto se considera con una regla de ablandamiento lineal. Las soluciones desarrolladas en este ejemplo se dejan en términos de  $M_s$  y  $\bar{H}_M$ , para la falla por flexión y  $V_s$  y  $\bar{H}_V$ , para la falla por cortante. Por lo tanto, cuando se considere el caso en el que solo falla por flexión, será necesario proporcionar de un valor grande a  $\bar{H}_V$ , y cuando se considere el caso de falla por cortante se dará un valor grande a  $\bar{H}_M$ .

Se presenta el desarrollo para obtener la solución en forma cerrada de los desplazamientos transversales,  $w$ , a lo largo de la viga. Esta solución se deduce a partir de Tabla A 2b, en la que se considera una regla de ablandamiento lineal. La solución corresponde a una viga en voladizo con una carga concentrada en su extremo libre, la cual desarrolla una discontinuidad que ablanda (articulación o dislocación) en su extremo fijo. En la ecuación (83) se presenta la solución de los desplazamientos transversales. Las curvas de los desplazamientos transversales a lo largo de la viga para distintos valores de  $P$  después de que se ha formado la discontinuidad, se presentan en la Figura 8a, para el caso que solo falla por flexión, y en la Figura 8b, para cuando solo falla por cortante.

$$w(x,P) = \frac{Px^2}{4.8}(3-x) + \frac{Px}{20} + \left(\frac{M_S}{0.8\bar{H}_M}\right)x + \frac{V_S}{20\bar{H}_V} \tag{83}$$



a)

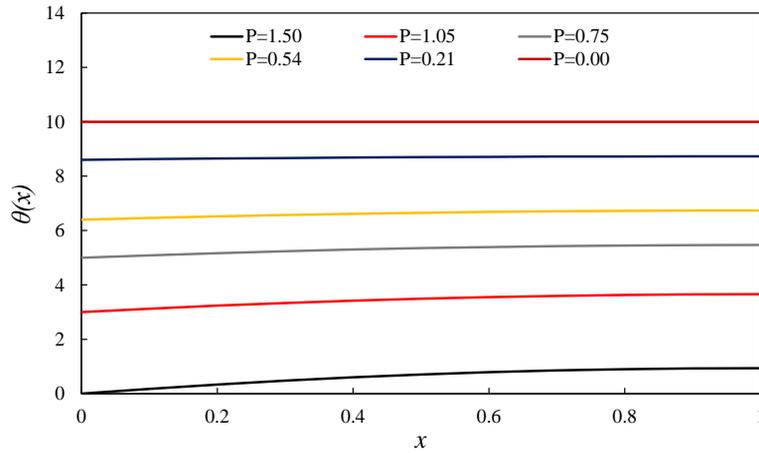


b)

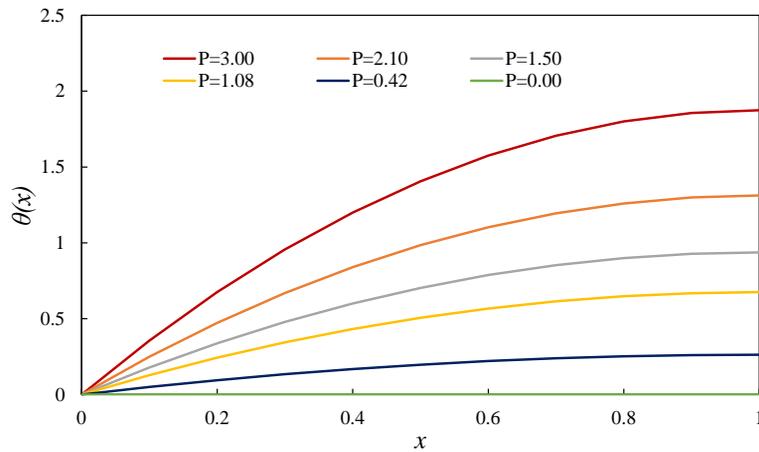
**Figura 8.** Curvas de la solución en forma cerrada de los desplazamientos transversales,  $w$ : a) falla flexión y b) falla cortante

La solución en forma cerrada de las rotaciones,  $\theta$ , a lo largo de la viga se deduce de la Tabla A 2b. En la ecuación (84), se presenta esta solución para el caso de vigas gruesas, para el caso de ablandamiento lineal. Las curvas de las rotaciones para distintos valores de  $P$  después de que se ha formado la discontinuidad, se presentan en la Figura 9a, para cuando falla por flexión, y en la Figura 9b, cuando falla por cortante.

$$\theta(x,P) = \frac{Px}{1.6}(2-x) + \frac{M_S}{0.8\bar{H}_M} \tag{84}$$



a)

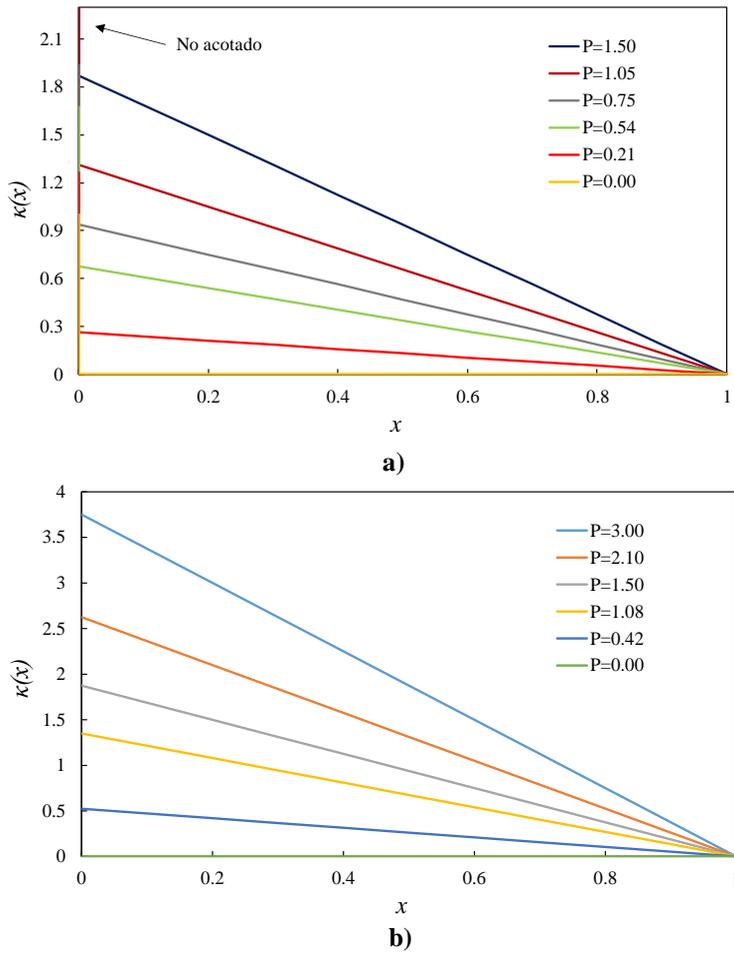


b)

**Figura 9.** Curvas de la solución en forma cerrada de las rotaciones,  $\theta$ : a) falla por flexión y b) falla por cortante

La solución en forma cerrada de la curvatura,  $\kappa$ , a lo largo de la viga se deduce de la Tabla A 2b. En la ecuación (85) se presenta esta solución para el caso de vigas gruesas, para el caso de ablandamiento lineal. Las curvas de la curvatura a lo largo de la viga para distintos valores de  $P$  después de formarse la discontinuidad, se presentan en la Figura 10a, para cuando falla por flexión, y en la Figura 10b, cuando falla por cortante.

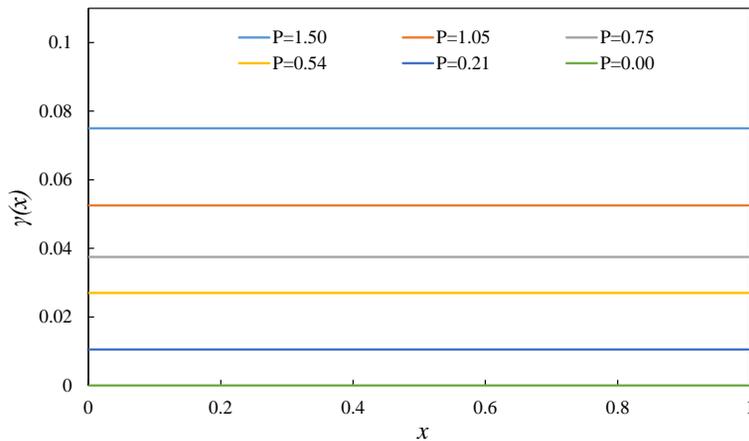
$$\kappa(x, P) = \frac{P}{0.8}(1-x) + \left( \frac{M_S}{0.8H_M} \right) \delta(x) \quad (85)$$



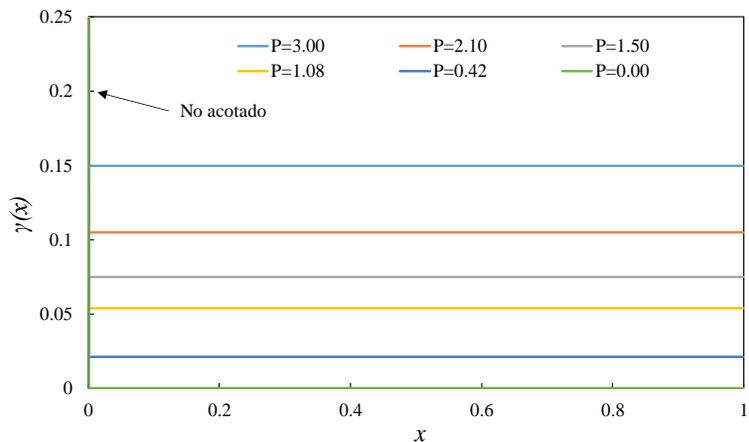
**Figura 10.** Curvas de la solución en forma cerrada de la curvatura,  $\kappa$ : a) falla por flexión y b) falla por cortante

La solución en forma cerrada de las deformaciones por cortante,  $\gamma$ , a lo largo de la viga se deduce de la Tabla A 2b. En la ecuación (86) se presenta la solución para el caso de vigas gruesas, para el caso de ablandamiento lineal. Las curvas de las deformaciones por cortante a lo largo de la viga para distintos valores de  $P$  después de formarse la discontinuidad, se presentan en la Figura 11a, para cuando falla por flexión, y en la Figura 11b, cuando falla por cortante.

$$\gamma(x, P) = \frac{P}{20} + \left( \frac{V_S}{20H_V} \right) \delta(x) \tag{86}$$



a)

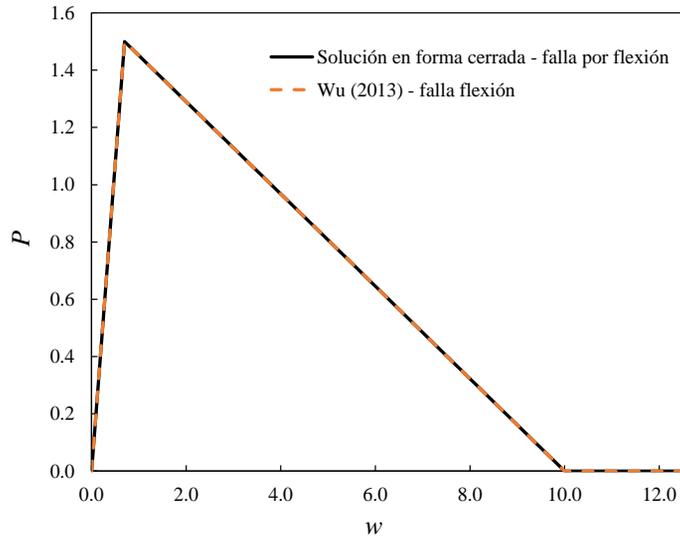


b)

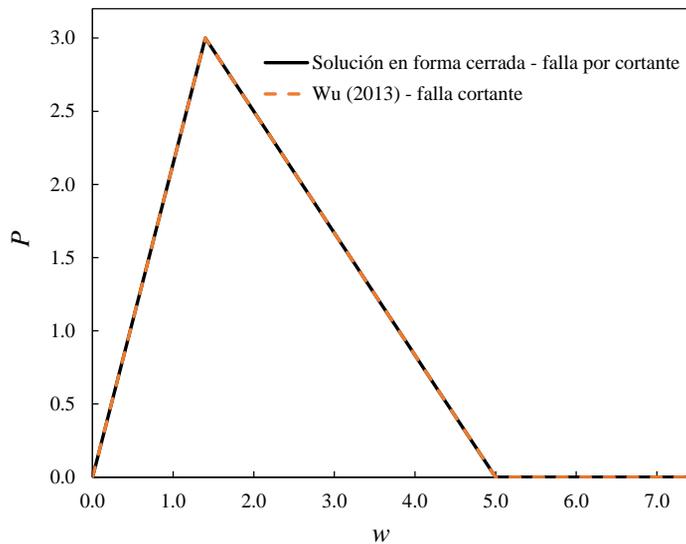
**Figura 11.** Curvas de la solución en forma cerrada de las deformaciones por cortante,  $\gamma$ : a) falla por flexión y b) falla por cortante

Los desplazamientos transversales en el extremo libre de la viga,  $w(x=L)$ , se obtienen a partir de la ecuación (83). Tanto el caso de falla por flexión como el de falla por cortante se obtienen de dicha expresión, atendiendo a los comentarios en párrafos anteriores. En la Figura 12 se presentan las curvas resultantes a partir de las soluciones en forma cerrada para el comportamiento del desplazamiento transversal en el extremo libre de la viga. Estas curvas representan el comportamiento de la viga desde el inicio de la aplicación de la carga hasta el proceso de falla. Las curvas obtenidas de las soluciones en forma cerrada se comparan con los resultados reportados por Wu (2013), quien modeló numéricamente este problema mediante elementos finitos enriquecidos con articulaciones plásticas que ablandan. Al integrar el área total bajo las curvas de la Figura 12, se obtiene que la energía disipada es igual para el caso de las soluciones en forma cerrada desarrolladas y los elementos finitos enriquecidos desarrollado por

Wu (2013). La energía disipada corresponde a la energía de fractura a flexión o la energía de fractura a cortante, según corresponda el caso, lo que garantiza la validez de las soluciones desarrolladas.



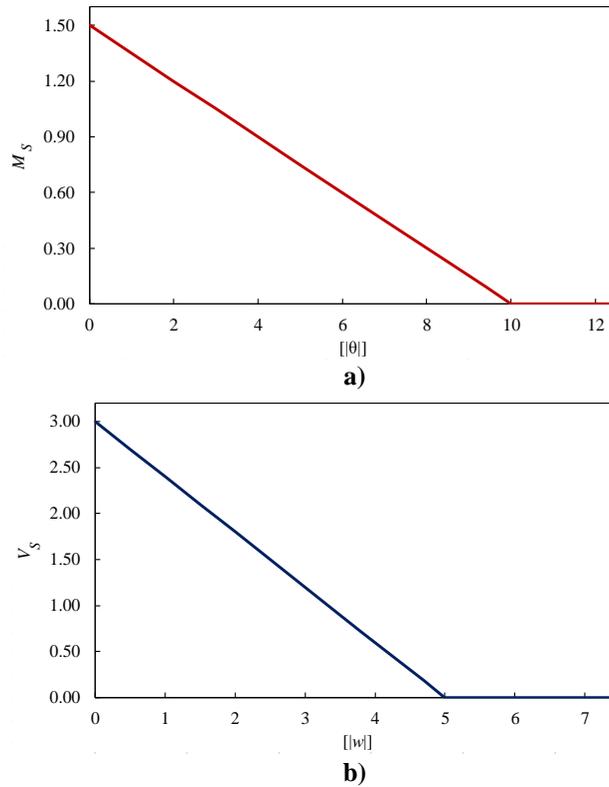
a)



b)

**Figura 12.** Curva carga  $P$  – desplazamiento transversal  $w$ , en el extremo libre de la viga: a) falla por flexión y b) falla por cortante

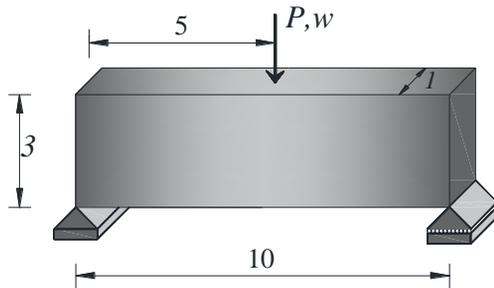
Las curvas  $M_s - [|\theta|]$  y  $V_s - [|w|]$  en  $S$ , se presentan en la Figura 13, las cuales se obtienen a partir de las ecuaciones (54) y (77), respectivamente, para ablandamiento lineal. El área bajo estas curvas es equivalente a la energía de fractura a flexión o energía de fractura a cortante, según sea el caso.



**Figura 13.** Curvas: a)  $M_s$  -  $[[\theta]]$  en  $S$  y b)  $V_s$  -  $[[w]]$  en  $S$  con regla de ablandamiento lineal

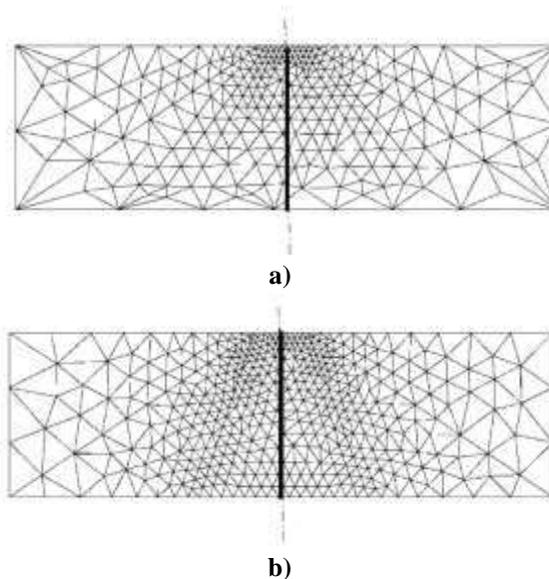
## 6.2 Prueba a flexión en tres puntos

Una viga simplemente apoyada se somete a una carga simétrica mediante la imposición de un desplazamiento transversal al centro del claro de la viga, como se presenta en la Figura 14, cuyo modelado numérico fue realizado por Wells y Sluys (2001). Las propiedades mecánicas del material de la viga son: módulo de elasticidad  $E = 100 \text{ MPa}$ , módulo a cortante  $G = 50 \text{ MPa}$  y energía de fractura a flexión  $G_{ff} = 3 \times 10^{-4} \text{ J/rad}$ . Se considera que la viga solo falla a flexión, con un momento último  $M_u = 2.5 \times 10^{-3} \text{ J}$ , por lo que solo se desarrolla una articulación que ablanda. En el desarrollo de las soluciones se consideran tanto vigas delgadas como vigas gruesas.

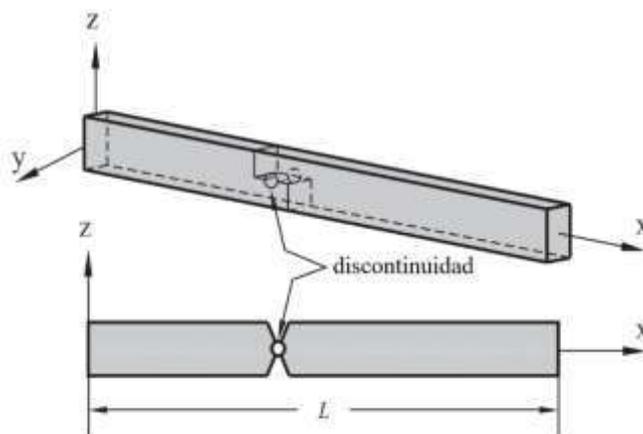


**Figura 14.** Viga a flexión en tres puntos (dimensiones en milímetros)

La viga de la Figura 14 fue modelada numéricamente por Wells y Sluys (2001) con dos mallas diferentes de elementos finitos triangulares bidimensionales de seis nodos. La primera malla consistió en 523 elementos finitos triangulares como se presenta en la Figura 15a. La segunda malla constó de 850 elementos finitos triangulares como se muestra en la Figura 15b. Asimismo, este ejemplo fue modelado numéricamente por Juárez-Luna y Ayala (2012) mediante elementos finitos viga con discontinuidades interiores como se presenta en la Figura 16.



**Figura 15.** Mallado de la viga con elementos finitos triangulares (tomado de Wells y Sluys, 2001): a) 523 elementos y b) 850 elementos



**Figura 16.** Modelado numérico de la viga con elementos finitos viga con discontinuidades interiores (tomado de Juárez-Luna y Ayala, 2012)

El desplazamiento transversal,  $w$ , a lo largo de la viga se obtiene a partir de la solución en forma cerrada de una viga simplemente apoyada con una carga concentrada al centro del claro, en la que se presenta una articulación que ablanda.

La solución para vigas delgadas y vigas gruesas se deducen de la Tabla A 1e y Tabla A 2d, respectivamente. En ambos casos se considera una regla de ablandamiento lineal y exponencial. En las ecuaciones (87) y (88), se presenta la solución para vigas delgadas, tanto para ablandamiento lineal como exponencial, respectivamente. En las ecuaciones (89) y (90), se presenta la solución en forma cerrada para vigas gruesas, tanto para ablandamiento lineal como exponencial, respectivamente. En la Figura 17a, se presenta la curva de los desplazamientos transversales a lo largo de la viga para distintos valores de  $P$  después de que se ha formado la discontinuidad, la cual se obtiene a partir de la ecuación (87). Bajo las mismas condiciones, la curva de los desplazamientos transversales a lo largo de la viga que se obtiene a partir de la ecuación (89), las cuales se presentan en la Figura 17b. La curva obtenida a partir de la ecuación (88) es similar a la curva obtenida con la ecuación (87), así como la curva obtenida de la ecuación (90) es similar a la de la ecuación (89), pues la regla de ablandamiento es en la discontinuidad, no a lo largo de la viga. A partir de las curvas que se presentan en la Figura 17, se aprecia que, una vez formada la discontinuidad, a medida que la carga  $P$  disminuye, se forma progresivamente la articulación que ablanda al centro del claro,  $[|\theta|]$ .

$$w(x,P) = \frac{P}{1350}(x-5)^3H(x-5) + \frac{Px}{900}\left(25 - \frac{x^2}{3}\right) - 0.12x(P-1) + 0.24(P-1)(x-5)H(x-5) \quad (87)$$

$$w(x,P) = \frac{P}{1350}(x-5)^3H(x-5) + \frac{Px}{900}\left(25 - \frac{x^2}{3}\right) - 0.06xLn(P) + 0.12(x-5)Ln(P)H(x-5) \quad (88)$$

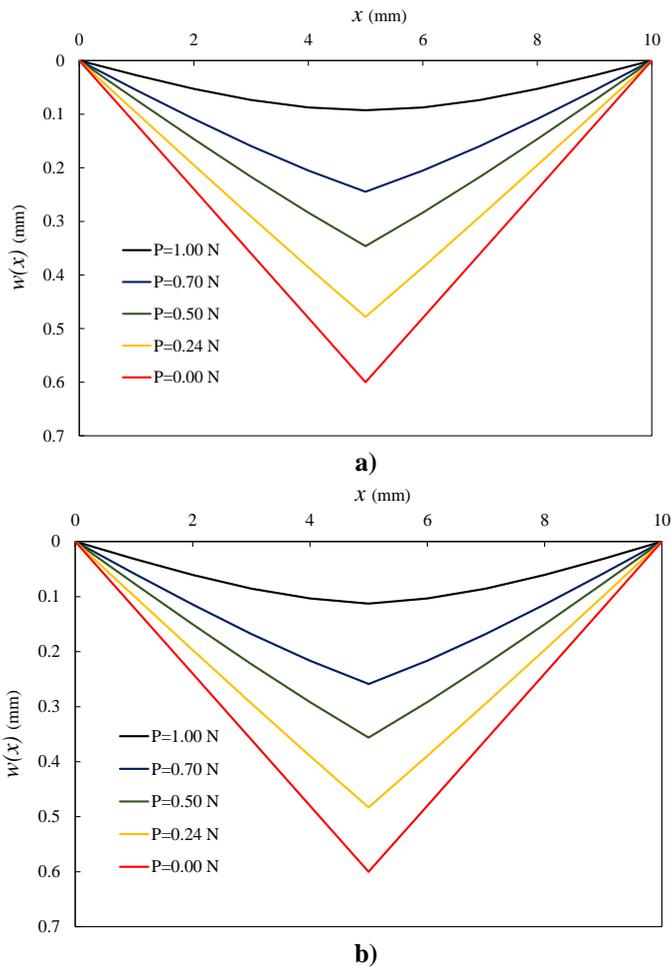
$$w(x,P) = \frac{P}{1350}(x-5)^3H(x-5) + \frac{Px}{900}\left(25 - \frac{x^2}{3}\right) - 0.12(P-1)x + \frac{P}{125}\left[\frac{x}{2} - (x-5)H(x-5)\right] + 0.24(P-1)(x-5)H(x-5) \quad (89)$$

$$w(x,P) = \frac{P}{1350}(x-5)^3H(x-5) + \frac{Px}{900}\left(25 - \frac{x^2}{3}\right) - 0.06xLn(P) + \frac{P}{125}\left[\frac{x}{2} - (x-5)H(x-5)\right] + 0.12(x-5)Ln(P)H(x-5) \quad (90)$$

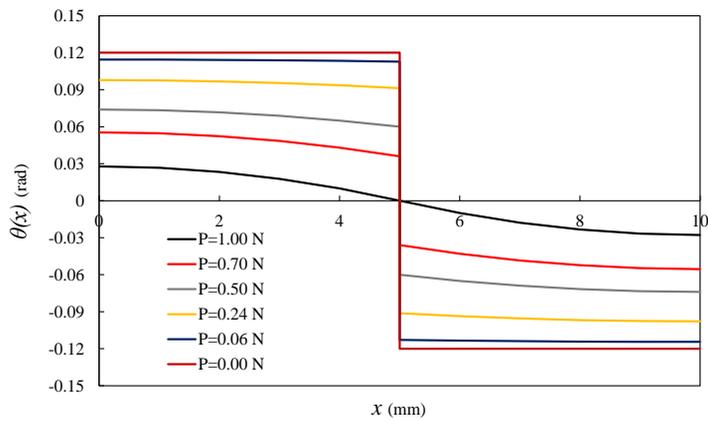
La solución en forma cerrada de las rotaciones,  $\theta$ , a lo largo de la viga se deduce de la Tabla A 1e para vigas delgadas y de la Tabla A 2d para vigas gruesas. Estas soluciones corresponden a una viga simplemente apoyada con una carga concentrada al centro del claro que presenta una articulación que ablanda. En ambos casos se considera una regla de ablandamiento lineal y exponencial. En las ecuaciones (91) y (92) se presentan las soluciones para vigas delgadas y gruesas, tanto para ablandamiento lineal como exponencial, respectivamente. Las curvas de las rotaciones a lo largo de la viga que se obtiene a partir de la ecuación (91), se presenta en la Figura 18 para distintos valores de  $P$  después de que se ha formado la discontinuidad. La curva que se obtiene a partir de la ecuación (92) es similar a la curva obtenida con la ecuación (91).

$$\theta(x,P) = \frac{P}{450}(x-5)^2H(x-5) + \frac{P}{3600}(100 - 4x^2) - 0.12(P-1) + 0.24(P-1)(x-5) \quad (91)$$

$$\theta(x,P) = \frac{P}{450}(x-5)^2H(x-5) + \frac{P}{3600}(100 - 4x^2) - 0.06Ln(P) + 0.12Ln(P)H(x-5) \quad (92)$$



**Figura 17.** Curva de la solución en forma cerrada de los desplazamientos transversales,  $w$ , a lo largo de la viga: a) vigas delgadas y b) vigas gruesas

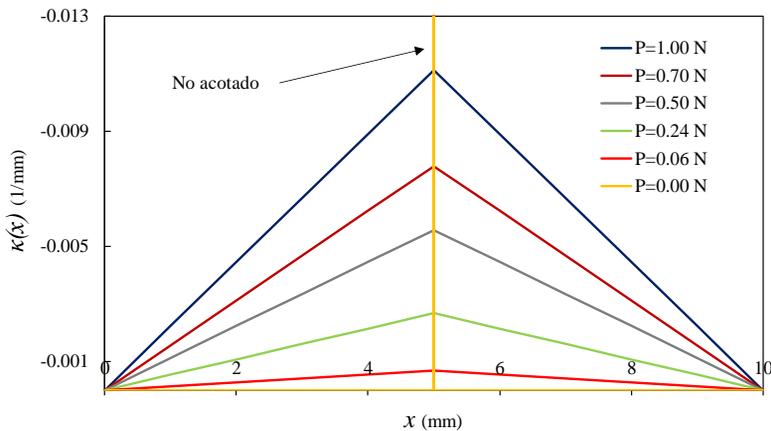


**Figura 18.** Curva de la solución en forma cerrada de las rotaciones,  $\theta$ , a lo largo de la viga (delgada y gruesa)

La solución en forma cerrada de la curvatura,  $\kappa$ , a lo largo de la viga se deduce de la Tabla A 1e para vigas delgadas y de la Tabla A 2d para vigas gruesas. Estas soluciones corresponden a una viga simplemente apoyada con una carga concentrada al centro del claro que presenta una articulación que ablanda. En ambos casos se considera una regla de ablandamiento lineal y exponencial. En las ecuaciones (93) y (94), se presenta la solución para vigas delgadas y gruesas, tanto para ablandamiento lineal como exponencial, respectivamente. La curva de la curvatura a lo largo de la viga que se obtiene a partir de la ecuación (93), se presenta en la Figura 19 para distintos valores de  $P$  después de que se ha formado la discontinuidad. La curva que se obtiene a partir de la ecuación (94) es similar a la curva obtenida con la ecuación (93).

$$\kappa(x,P) = \frac{P}{225}(x-5)H(x-5) - \frac{Px}{450} + 0.24(P-1)\delta(x-5) \quad (93)$$

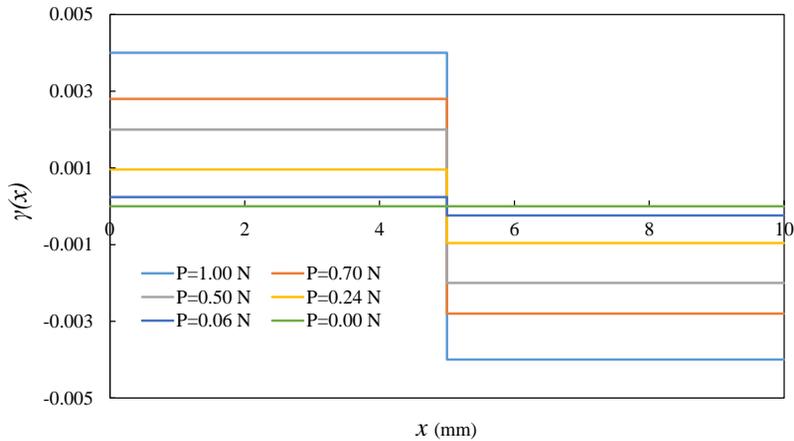
$$\kappa(x,P) = \frac{P}{225}(x-5)H(x-5) - \frac{Px}{450} + 0.12Ln(P)\delta(x-5) \quad (94)$$



**Figura 19.** Curva de la solución en forma cerrada de la curvatura,  $\kappa$ , a lo largo de la viga (delgada y gruesa)

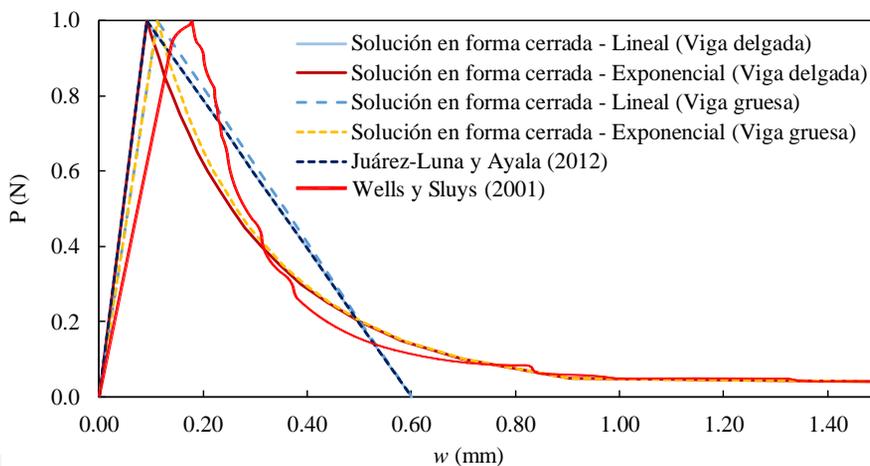
La solución en forma cerrada de las deformaciones por cortante,  $\gamma$ , a lo largo de la viga se deduce de la Tabla A 2d para vigas gruesas. Las deformaciones por cortante son nulas en vigas delgadas por las hipótesis consideradas. Esta solución corresponde a una viga simplemente apoyada con una carga concentrada al centro del claro que presenta una articulación que ablanda. En la solución ya no es necesario tomar en cuenta las reglas de ablandamiento, pues no se presenta una dislocación que ablanda. En la ecuación (95), se presenta la solución para vigas gruesas. La curva de las deformaciones por cortante a lo largo de la viga que se obtiene a partir de la ecuación (95), se presenta en la Figura 20 para distintos valores de  $P$  después de que se ha formado la discontinuidad.

$$\gamma(x,P) = \frac{P}{250} - \frac{P}{125}H(x-5) \quad (95)$$



**Figura 20.** Curva de la solución en forma cerrada de las deformaciones por cortante,  $\gamma$ , a lo largo de la viga (gruesa)

La historia de los desplazamientos transversales en el centro del claro de la viga,  $w(x = L/2)$ , se obtiene para vigas delgadas a partir de las ecuaciones (87) y (88), para ablandamiento lineal y exponencial, respectivamente, y para vigas gruesas a partir de las ecuaciones (89) y (90), para ablandamiento lineal y exponencial, respectivamente. En la Figura 21 se presentan las curvas resultantes de las ecuaciones antes mencionadas, que representan el comportamiento de la viga desde el inicio de la aplicación de la carga hasta el proceso de falla. Las curvas obtenidas de las soluciones en forma cerrada se comparan con los resultados reportados por Wells y Sluys (2001), quienes modelaron numéricamente este problema mediante elementos finitos triangulares bidimensionales de seis nodos considerando esfuerzos planos y con los resultados reportados por Juárez-Luna y Ayala (2012), quienes aproximaron la solución con elementos finitos viga con discontinuidades interiores (ver Figura 21).



**Figura 21.** Curva carga  $P$  – desplazamiento transversal  $w(x = L/2)$ , al centro del claro de la viga

Al integrar el área total bajo las curvas de la Figura 21, la energía disipada es igual a  $3.08 \times 10^{-4} J$  para el caso de los elementos finitos triangulares bidimensionales y  $3 \times 10^{-4} J$  para el caso de las soluciones en forma cerrada desarrolladas y los elementos finitos con discontinuidades interiores. La energía disipada corresponde a la energía de fractura a flexión, lo que garantiza la validez de las soluciones desarrolladas. La diferencia en las pendientes en la parte ascendente de las curvas se debe a que, en las vigas, el inicio del daño ocurre cuando se alcanza el valor de  $M_y$ , mientras que, para el caso de los elementos finitos triangulares, el inicio del daño ocurre antes de alcanzar el valor del momento último, lo que reduce el valor de la pendiente. La curva  $M_s - [|\theta|]$  en  $S$ , se presenta en la Figura 22, la cual se obtiene a partir de las ecuaciones (54) y (55), para ablandamiento lineal y exponencial, respectivamente. El área bajo esta curva es también equivalente a la energía de fractura a flexión.

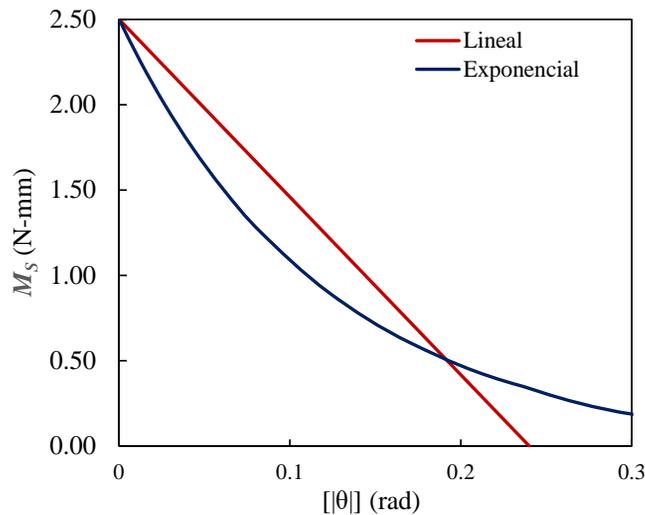
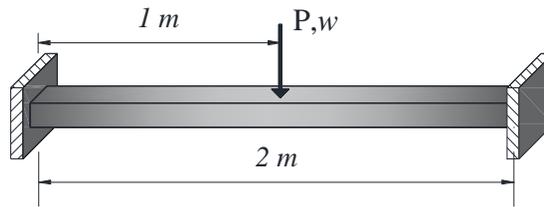


Figura 22. Curva  $M_s - [|\theta|]$  en  $S$

### 6.3 Viga empotrada con fenómeno de retroceso (snap-back phenomenon)

Se estudia el proceso de falla de una viga empotrada en sus extremos, la cual está sometida a una carga concentrada incremental al centro del claro de la viga, como se presenta en la Figura 23. Las propiedades mecánicas del material son: módulo de elasticidad  $E = 40,000 MPa$ , módulo a cortante  $G = 16,666.67 MPa$ , momento último  $M_u = 0.8 MJ$ , cortante último  $V_u = 1.6 MN$ , energía de fractura a flexión  $G_{ff} = 0.04 MJ/rad$  y energía de fractura a cortante  $G_{ff} = 0.005 MJ$ . La sección transversal de la viga es rectangular de  $b = 0.1 m$  y  $h = 0.2 m$ .

En este ejemplo se estudian dos casos del proceso de falla de la viga. El primero consiste en solucionar el problema con hipótesis de vigas delgadas, en el que solo se toma en cuenta la falla por flexión, por lo que se desarrolla una articulación que ablanda. El segundo caso considera hipótesis de vigas gruesas, en el que se considera que la viga falla simultáneamente por flexión y cortante, por lo tanto, se desarrollan una articulación y una dislocación que ablandan. Este ejemplo fue propuesto y modelado numéricamente por Juárez-Luna y Ayala (2012) con elementos finitos viga con discontinuidades interiores (ver Figura 16).



**Figura 23.** Descripción geométrica de viga empotrada

Los desplazamientos transversales,  $w$ , a lo largo de la viga, para el caso de hipótesis de vigas delgadas, se obtiene a partir de la solución en forma cerrada de una viga empotrada con una carga concentrada al centro del claro, en la que se presenta una articulación que ablanda. Esta solución se deduce a partir de Tabla A 1f, en la que se considera una regla de ablandamiento lineal y exponencial. En las ecuaciones (96) y (97) se presenta la solución de los desplazamientos transversales de este problema, considerando hipótesis de vigas delgadas, para ablandamiento lineal y exponencial, respectivamente. En la Figura 24, se presenta la curva de los desplazamientos transversales a lo largo de la viga para distintos valores de  $P$  después de que se ha formado la discontinuidad, la cual se obtiene a partir de la ecuación (96). La curva obtenida a partir de la ecuación (97) es similar a la curva obtenida con la ecuación (96). A partir de las curvas de la Figura 24, se nota la presencia del fenómeno de retroceso de desplazamientos (en inglés snap-back phenomenon), pues una vez que ya se ha formado la discontinuidad, los desplazamientos disminuyen a medida que disminuye la carga aplicada. Por lo que las soluciones desarrolladas tienen la capacidad de modelar adecuadamente este fenómeno físico, lo que normalmente no es posible con la mayoría de los elementos finitos con discontinuidades que aproximan estas soluciones.

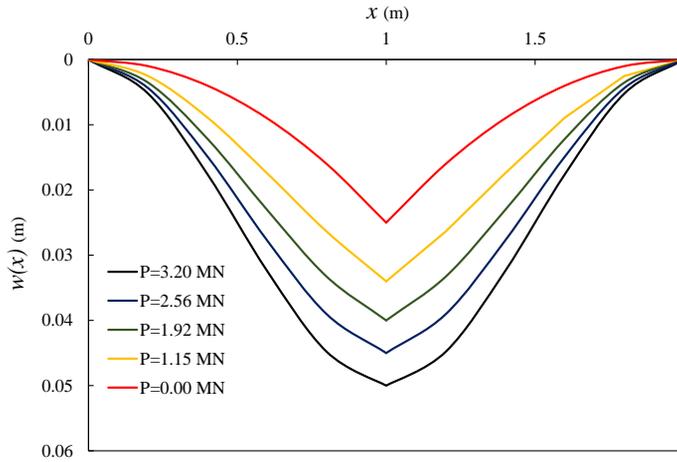
$$w(x, P) = \frac{P}{16}(x-1)^3 H(x-1) + \frac{Px^2}{10.667} \left(0.5 - \frac{x}{3}\right) - \left(\frac{0.25P-0.8}{32}\right)x^2 + \left(\frac{0.25P-0.8}{8}\right)(x-1)H(x-1) \quad (96)$$

$$w(x, P) = \frac{P}{16}(x-1)^3 H(x-1) + \frac{Px^2}{10.667} \left(0.5 - \frac{x}{3}\right) - 0.0125x^2 \text{Ln}(0.3125P) + 0.05 \text{Ln}(0.3125P)(x-1)H(x-1) \quad (97)$$

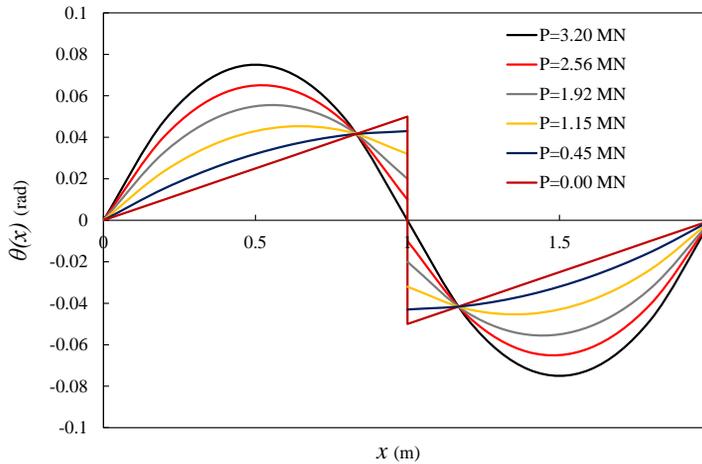
La solución en forma cerrada de las rotaciones,  $\theta$ , a lo largo de la viga, para el caso de hipótesis de vigas delgadas, se deduce de la Tabla A 1f. Esta solución corresponde a una viga empotrada con una carga concentrada al centro del claro que presenta una articulación que ablanda. Tanto una regla de ablandamiento lineal como una exponencial se consideran. En las ecuaciones (98) y (99) se presenta esta solución para el caso de vigas delgadas, tanto para ablandamiento lineal como exponencial, respectivamente. La curva de las rotaciones a lo largo de la viga que se obtiene a partir de la ecuación (98), se presenta en la Figura 25 para distintos valores de  $P$  después de que se ha formado la discontinuidad. La curva que se obtiene a partir de la ecuación (99) es similar a la curva obtenida con la ecuación (98). Puede ser no tan evidente, pero a partir de las curvas de la Figura 25 se observa nuevamente el fenómeno de retroceso de desplazamientos. Además, a medida que la carga  $P$  disminuye, se va formando la articulación que ablanda al centro del claro,  $[[\theta]]$ .

$$\theta(x,P) = \frac{3P}{16}(x-1)^2H(x-1) + \frac{Px(1-x)}{10.667} - \left(\frac{0.25P-0.8}{16}\right)x + \left(\frac{0.25P-0.8}{8}\right)H(x-1) \quad (98)$$

$$\theta(x,P) = \frac{3P}{16}(x-1)^2H(x-1) + \frac{Px(1-x)}{10.667} - 0.025xLn(0.3125P) + 0.05Ln(0.3125P)H(x-1) \quad (99)$$



**Figura 24.** Curva de la solución en forma cerrada de los desplazamientos transversales,  $w$  (vigas delgadas)



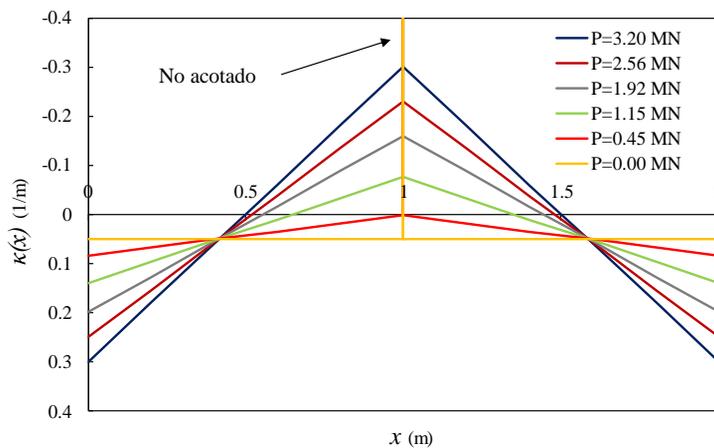
**Figura 25.** Curva de la solución en forma cerrada de las rotaciones,  $\theta$  (vigas delgadas)

La solución en forma cerrada de la curvatura,  $\kappa$ , a lo largo de la viga se deduce de la Tabla A 1f, para el caso de hipótesis de vigas delgadas. Estas soluciones corresponden a una viga empotrada con una carga concentrada al centro del claro que presenta una articulación que ablanda. En las ecuaciones (100) y (101) se presenta la solución para vigas delgadas, tanto para ablandamiento lineal como exponencial, respectivamente. La curva de la curvatura a lo largo de la viga que se obtiene a partir de la ecuación (100), se presenta en la Figura 26 para distintos

valores de  $P$  después de que se ha formado la discontinuidad. La curva que se obtiene a partir de la ecuación (101) es similar a la curva obtenida con la ecuación (100). En las curvas de la Figura 26 nuevamente se observa el fenómeno de retroceso, pues una vez formada la discontinuidad, a medida que disminuye el valor de la carga  $P$  disminuye el valor de la curvatura a lo largo de la viga. Además, al centro del claro de la viga se presenta el valor no acotado de la curvatura, es decir una concentración de deformaciones, lo que representa una singularidad.

$$\kappa(x, P) = \frac{3P}{8}(x-1)H(x-1) + \frac{3P}{8}\left(0.25 - \frac{x}{2}\right) - \left(\frac{0.25P-0.8}{16}\right) + \left(\frac{0.25P-0.8}{8}\right)\delta(x-1) \quad (100)$$

$$\kappa(x, P) = \frac{3P}{8}(x-1)H(x-1) + \frac{3P}{8}\left(0.25 - \frac{x}{2}\right) - 0.025 \text{Ln}(0.3125P) + 0.05 \text{Ln}(0.3125P)\delta(x-1) \quad (101)$$

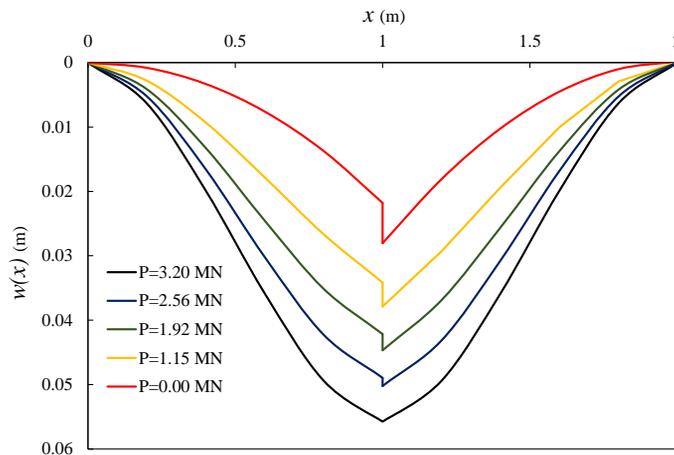


**Figura 26.** Curva de la solución en forma cerrada de la curvatura,  $\kappa$  (vigas delgadas)

Ahora se presenta el desarrollo para obtener la solución en forma cerrada de los desplazamientos transversales,  $w$ , a lo largo de la viga, para el caso de hipótesis de vigas gruesas. Esta solución se deduce a partir de Tabla A 2e, en la que se considera una regla de ablandamiento lineal y exponencial. La solución corresponde a una viga empotrada con una carga concentrada al centro del claro que presenta una articulación y una dislocación que ablandan simultáneamente. En las ecuaciones (102) y (103) se presenta la solución de los desplazamientos transversales de este problema, considerando hipótesis de vigas gruesas, para ablandamiento lineal y exponencial, respectivamente. En la Figura 27, se presenta la curva de los desplazamientos transversales a lo largo de la viga para distintos valores de  $P$  después de que se ha formado la discontinuidad, la cual se obtiene a partir de la ecuación (102). La curva obtenida a partir de la ecuación (103) es similar a la curva obtenida con la ecuación (102). De las curvas que se presentan en la Figura 27, se observa la presencia del fenómeno de retroceso de desplazamientos, pues una vez que ya se ha formado la discontinuidad, los desplazamientos disminuyen a medida que disminuye la carga aplicada. Además, de la Figura 27 se observa que simultáneamente se presenta la falla por flexión y por cortante, pues al centro de la viga se forman progresivamente la articulación que ablanda,  $[[\theta]]$ , y la dislocación que ablanda,  $[[w]]$ .

$$\begin{aligned}
 w(x, P) = & \frac{P}{16}(x-1)^3 H(x-1) + \frac{Px^2}{10.667} \left(0.5 - \frac{x}{3}\right) - \frac{(0.25P-0.8)x^2}{32} \\
 & + \left(\frac{(0.25P-0.8)(x-1)}{8}\right) H(x-1) - \frac{x^2(x-3)(0.5P-1.6)}{1053.491} \\
 & + \frac{1}{277.778} \left[ \frac{x}{2} \left( P + 7.776 \left( \frac{0.5P-1.6}{256} \right) \right) - P(x-1)H(x-1) \right] \\
 & - \left( \frac{0.5P-1.6}{256} \right) H(x-1)
 \end{aligned} \tag{102}$$

$$\begin{aligned}
 w(x, P) = & \frac{P}{16}(x-1)^3 H(x-1) + \frac{Px^2}{10.667} \left(0.5 - \frac{x}{3}\right) - (0.0125 \text{Ln}(0.3125P))x^2 \\
 & + (0.05 \text{Ln}(0.3125P))(x-1)H(x-1) - \left(\frac{1.6}{512} \text{Ln}(0.3125P)\right) \frac{x^2(x-3)}{4.1152} \\
 & + \frac{1}{277.778} \left[ \frac{x}{2} \left( P + 7.776 \left( \frac{1.6}{512} \text{Ln}(0.3125P) \right) \right) - P(x-1)H(x-1) \right] \\
 & - \left( \frac{1.6}{512} \text{Ln}(0.3125P) \right) H(x-1)
 \end{aligned} \tag{103}$$

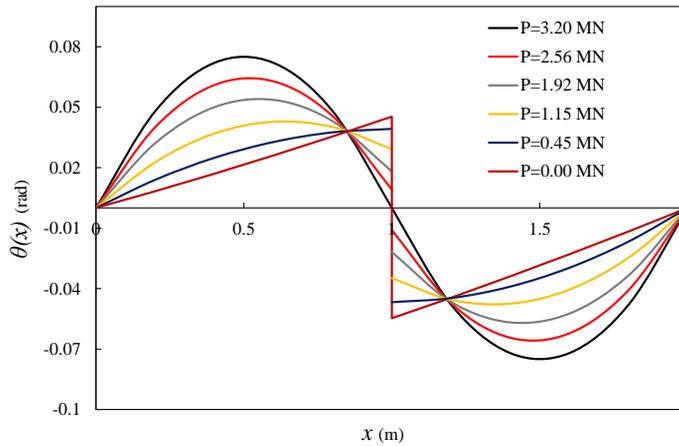


**Figura 27.** Curva de la solución en forma cerrada de los desplazamientos transversales,  $w$  (vigas gruesas)

La solución en forma cerrada de las rotaciones,  $\theta$ , a lo largo de la viga, para el caso de hipótesis de vigas gruesas, se deduce de la Tabla A 2e. Esta solución corresponde a una viga empotrada con una carga concentrada al centro del claro que presenta simultáneamente una articulación y una dislocación que ablandan. Tanto una regla de ablandamiento lineal como una exponencial se consideran. En las ecuaciones (104) y (105) se presenta esta solución para el caso de vigas gruesas, tanto para ablandamiento lineal como exponencial, respectivamente. La curva de las rotaciones a lo largo de la viga que se obtiene a partir de la ecuación (104), se presenta en la Figura 28 para distintos valores de  $P$  después de que se ha formado la discontinuidad. La curva que se obtiene a partir de la ecuación (105) es similar a la curva obtenida con la ecuación (104). A partir de las curvas de la Figura 28 puede notarse nuevamente el fenómeno de retroceso. Además, a medida que la carga  $P$  disminuye, se forma progresivamente la articulación que ablanda al centro del claro,  $|\theta|$ .

$$\theta(x,P) = \frac{3P}{16}(x-1)^2H(x-1) + \frac{Px}{10.667}(1-x) - \frac{(0.25P-0.8)x}{16} + \left(\frac{0.25P-0.8}{8}\right)H(x-1) - \frac{x(0.5P-1.6)}{175.582}\left(\frac{x}{2}-1\right) \tag{104}$$

$$\theta(x,P) = \frac{3P}{16}(x-1)^2H(x-1) + \frac{Px}{10.667}(1-x) - 0.025xLn(0.3125P) + 0.05Ln(0.3125P)H(x-1) - \frac{1.6xLn(0.3125P)}{351.164}\left(\frac{x}{2}-1\right) \tag{105}$$

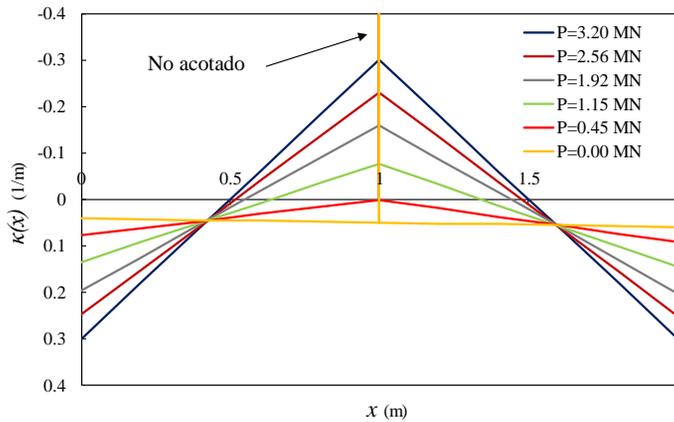


**Figura 28.** Curva de la solución en forma cerrada de las rotaciones,  $\theta$  (vigas gruesas)

La solución en forma cerrada de la curvatura,  $\kappa$ , a lo largo de la viga se deduce de la Tabla A 2e, para el caso de hipótesis de vigas gruesas. Estas soluciones corresponden a una viga empotrada con una carga concentrada al centro del claro que presenta una articulación y una dislocación que ablandan simultáneamente. En las ecuaciones (106) y (107) se presenta la solución para vigas gruesas, tanto para ablandamiento lineal como exponencial, respectivamente. La curva de la curvatura a lo largo de la viga que se obtiene a partir de la ecuación (106), se presenta en la Figura 29 para distintos valores de  $P$  después de que se ha formado la discontinuidad. La curva que se obtiene a partir de la ecuación (107) es similar a la curva obtenida con la ecuación (106). En las curvas de la Figura 29 nuevamente se observa el fenómeno de retroceso. Además, al centro del claro de la viga se presenta el valor no acotado de la curvatura, es decir una concentración de deformaciones.

$$\kappa(x,P) = \frac{3P}{8}(x-1)H(x-1) + \frac{3P}{8}\left(0.25 - \frac{x}{2}\right) - \frac{0.25P-0.8}{16} + \left(\frac{0.25P-0.8}{8}\right)\delta(x-1) - \left(\frac{0.5P-1.6}{175.582}\right)(x-1) \tag{106}$$

$$\kappa(x,P) = \frac{3P}{8}(x-1)H(x-1) + \frac{3P}{8}\left(0.25 - \frac{x}{2}\right) - 0.025Ln(0.3125P) + 0.05Ln(0.3125P)\delta(x-1) - \frac{1.6Ln(0.3125P)}{351.164}(x-1) \tag{107}$$

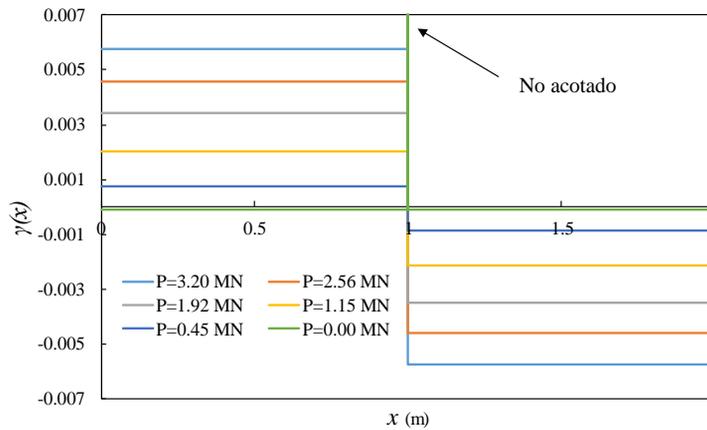


**Figura 29.** Curva de la solución en forma cerrada de la curvatura,  $\kappa$  (vigas gruesas)

La solución en forma cerrada de las deformaciones por cortante,  $\gamma$ , a lo largo de la viga se deduce de la Tabla A 2e para vigas gruesas. Las deformaciones por cortante son nulas en vigas delgadas por las hipótesis consideradas, por lo que dicha curva no se presenta. Esta solución corresponde a una viga empotrada con una carga concentrada al centro del claro que presenta una articulación y una dislocación que ablandan simultáneamente. En las ecuaciones (108) y (109) se presenta la solución para vigas gruesas, tanto para ablandamiento lineal como exponencial, respectivamente. La curva de las deformaciones por cortante a lo largo de la viga que se obtiene a partir de la ecuación (108), se presenta en la Figura 30 para distintos valores de  $P$  después de que se ha formado la discontinuidad. La curva que se obtiene a partir de la ecuación (109) es similar a la curva obtenida con la ecuación (108). En las curvas de la Figura 30 se observa el fenómeno de retroceso, así como el valor no acotado que se presenta al centro del claro de la viga, debido a la concentración de deformaciones por cortante.

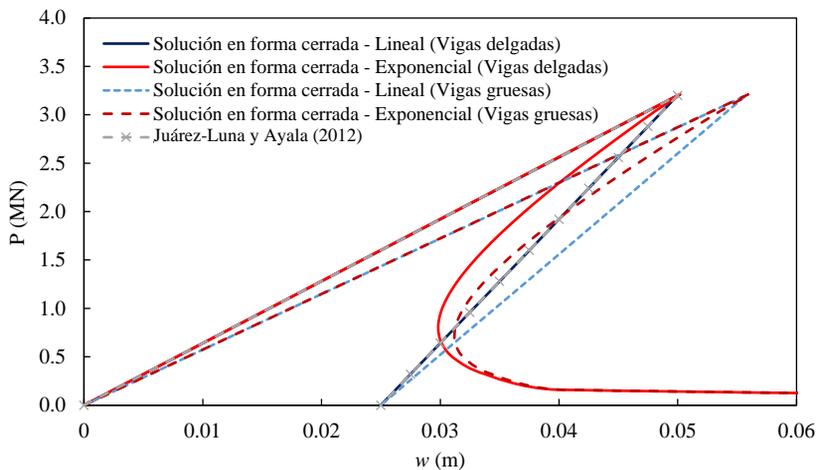
$$\gamma(x, P) = \frac{1}{277.778} \left[ \frac{P}{2} - PH(x-1) + \left( \frac{0.5P-1.6}{65.843} \right) \right] - \left( \frac{0.5P-1.6}{256} \right) \delta(x-1) \quad (108)$$

$$\gamma(x, P) = \frac{1}{277.778} \left[ \frac{P}{2} - PH(x-1) + \left( \frac{1.5}{512} \ln(0.3125P) \right) \frac{1}{0.2572} \right] - \left( \frac{1.6}{512} \ln(0.3125P) \right) \delta(x-1) \quad (109)$$



**Figura 30.** Curva de la solución en forma cerrada de las deformaciones por cortante,  $\gamma$  (vigas gruesas)

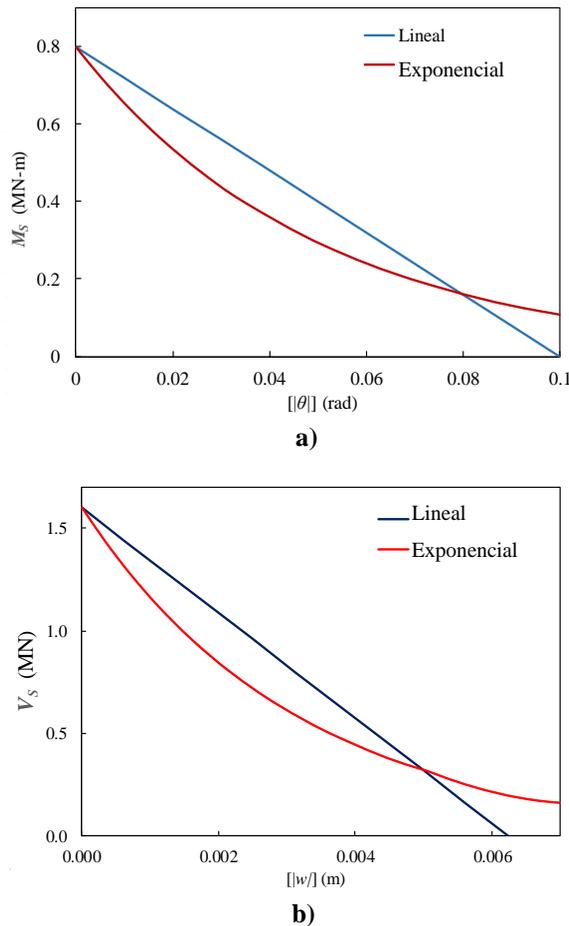
Los desplazamientos transversales al centro del claro de la viga,  $w(x = L/2)$ , se obtienen para el primer caso (vigas delgadas) de las ecuaciones (96) y (97), para ablandamiento lineal y exponencial, respectivamente, y para el segundo caso (vigas gruesas) a partir de las ecuaciones (102) y (103), para ablandamiento lineal y exponencial, respectivamente. En la Figura 31 se presentan las curvas resultantes a partir de las ecuaciones antes mencionadas, que representan el comportamiento de la viga desde el inicio de la aplicación de la carga hasta el proceso de falla. Las curvas obtenidas de las soluciones en forma cerrada se comparan con los resultados reportados por Juárez-Luna y Ayala (2012), quienes aproximaron la solución con elementos finitos viga con discontinuidades interiores.



**Figura 31.** Curva carga  $P$  – desplazamiento transversal  $w(x = L/2)$ , al centro del claro de la viga

Al integrar el área total bajo las curvas de la Figura 31, se obtiene que la energía disipada es igual para el caso de las soluciones en forma cerrada desarrolladas y los elementos finitos con discontinuidades interiores. La energía disipada corresponde a la energía de fractura a flexión y la energía de fractura a cortante, lo

que garantiza la validez de las soluciones desarrolladas. Las curvas  $M_S - [|\theta|]$  y  $V_S - [w]$  en  $S$ , se presentan en la Figura 32, las cuales se obtienen a partir de las ecuaciones (54) y (77) para ablandamiento lineal y con las ecuaciones (55) y (79) para ablandamiento exponencial. El área bajo estas curvas es equivalente a la energía de fractura a flexión o energía de fractura a cortante, según sea el caso.



**Figura 32.** Curvas: a)  $M_S - [|\theta|]$  en  $S$  y b)  $V_S - [w]$  en  $S$

## 7 Conclusiones

Se desarrollaron formulaciones variacionales del proceso de falla del material para vigas delgadas y gruesas con discontinuidades que ablandan que se adaptan para representar la localización de deformaciones. Estas formulaciones se fundamentan en los principios energéticos de la teoría de vigas gruesas, de la cual se deduce naturalmente la teoría de vigas delgadas. El modelo de discontinuidades interiores y las propiedades de la función delta de Dirac se utilizaron para el tratamiento matemático de las singularidades que se producen en la curvatura y / o la deformación por cortante. A partir de las formulaciones desarrolladas se obtienen las ecuaciones diferenciales que definen el problema de valores en la frontera mediante el análisis convencional de cálculo de variaciones.

Se desarrollaron soluciones en forma cerrada para problemas de referencia de vigas delgadas y gruesas al resolver las ecuaciones diferenciales. Estas soluciones modelan adecuadamente la historia de cargas y desplazamientos, incluidas las deformaciones no acotadas en la zona de localización, así como la carga y descarga en las partes en las que se divide la viga y, en particular, fenómeno de retroceso de desplazamientos, que generalmente produce inestabilidades numéricas durante el proceso de simulación. Estas soluciones de forma cerrada proporcionan el comportamiento del elemento de viga desde las cargas iniciales hasta el colapso del elemento. En el desarrollo de las soluciones en forma cerrada se muestra que existe una relación directa entre el modelo de discontinuidad fuerte y el modelo de discontinuidad discreta.

En los ejemplos de aplicación, las curvas de carga-desplazamiento calculadas con las soluciones en forma cerrada desarrolladas están de acuerdo con las soluciones numéricas reportadas en la literatura. Se demostró que la energía inducida por las cargas externas a los elementos se libera o transforma en la energía necesaria para desarrollar una discontinuidad (articulación y/o dislocación). Las áreas bajo las curvas  $M_s - [|\theta|]$  y  $V_s - [|w|]$  son equivalentes a la energía de fractura a flexión y la energía de fractura a cortante, respectivamente.

## Agradecimientos

El primer autor agradece al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por la beca otorgada para sus estudios de doctorado. Ambos autores agradecen las facilidades proporcionadas por la Universidad Autónoma Metropolitana, Azcapotzalco, para el desarrollo de este trabajo.

## REFERENCIAS

1. Armero F. y Ehrlich D. (2006), "Numerical modeling of softening hinges in thin Euler – Bernoulli beams", *Computers & Structures*, **84(10-11)**, 641-656.
2. Bazant Z.P. y Jirasek M. (1996), "Softening-induced dynamic localization instability: seismic damage in frames", *Journal of Engineering Mechanics*, **122(12)**, 1149–1158.
3. Bazant Z.P. y Kazemi M.T. (1994), "Localization of softening damage in frames and implications for earthquake resistance", Proceedings of the 5th US National Conference on Earthquake Engineering, Earthquake Engineering Research Institute, Oakland, CA, **1**, 313–322.
4. Biondi B. y Caddemi S. (2005), "Closed form solutions of Euler-Bernoulli beams with singularities", *International Journal of Solids and Structures*, **42(9-10)**, 3027-3044.
5. Bitar I., Benkemoun N., Kotronis P. y Grange S. (2019), "A multifiber Timoshenko beam with embedded discontinuities", *Engineering Fracture Mechanics*, **214**, 339-364.
6. Bitar I., Kotronis P., Benkemoun N. y Grange S. (2018), "A generalized Timoshenko beam with embedded rotation discontinuity", *Finite Elements in*

*Analysis and Design*, **150**, 34-50.

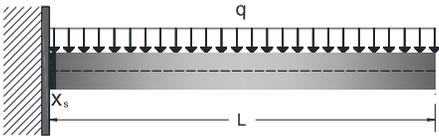
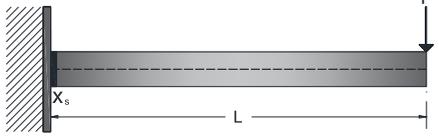
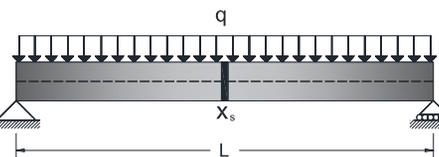
7. Bui N.N., Ngo M., Nikolic M., Brancherie D. y Ibrahimbegovic A. (2014), "Enriched Timoshenko beam finite element for modelling bending and shear failure of reinforced concrete frames", *Computers & Structures*, **143**, 9-18.
8. Dirac P.A. (1958), "The principles of quantum mechanics", Oxford at the Clarendon Press, 4ta edición.
9. Dujc J., Brank B. y Ibrahimbegovic A. (2010), "Multi-scale computational model for failure analysis of metal frames that includes softening and local buckling", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **199(21-22)**, 1371-1385.
10. Ehrlich D. y Armero F. (2004), "Finite element methods for the analysis of softening plastic hinge in beams and frames", *Computational Mechanics*, **35**, 237-264.
11. Falsone G. (2002), "The use of generalised functions in the discontinuous beam bending differential equations", *International Journal of Engineering Education*, **18(3)**, 337-343.
12. Feng D., Wu G., Sun Z. y Xu J. (2017), "A flexure-shear Timoshenko fiber beam element based on softened damage-plasticity model", *Engineering Structures*, **140**, 483-497.
13. Jirásek M. (1997), "Analytical and numerical solutions for frames with softening hinges" *Journal of Engineering Mechanics*, **123(1)**, 8-14.
14. Juárez-Luna G. y Ayala A.G. (2012), "Finite element variational formulation for beams with discontinuities", *Finite Elements in Analysis and Design*, **54**, 37-47.
15. Juárez-Luna G. y Ayala A.G. (2014), "Improvement of some features of finite elements with embedded discontinuities", *Engineering Fracture Mechanics*, **118**, 31-48.
16. Juárez-Luna G., Martínez-Miranda A.U. y Ayala A.G. (2021), "Closed form solutions for the strain localization problem in a softening bar under tension with the continuum damage and the embedded discontinuity kinematics", *Mechanics of Materials*, **158**, 103850.
17. Juárez-Luna, G. y Tenorio-Montero, E. (2019), "Formulation of a thick beam-column element with embedded discontinues for modelling hinges in simple and double-lined tunnels", *Tunneling and Underground Space Technology*, **93**, 103091.
18. Jukic M., Brank B. y Ibrahimbegovic A. (2013), "Embedded discontinuity finite element for failure analysis of planar reinforced concrete beams and frames", *Engineering Structures*, **50**, 115-125.
19. Krasnov M., Kiseliiov A. y Makárenko G. (2002), "Cálculo Variacional". Editorial

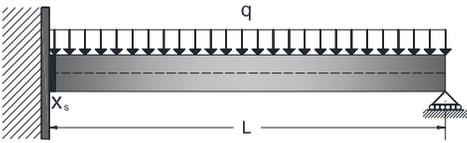
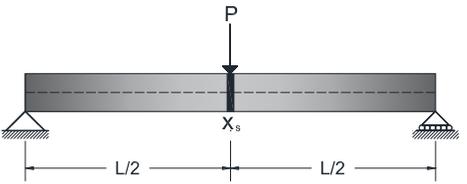
Mir, 1ra edición.

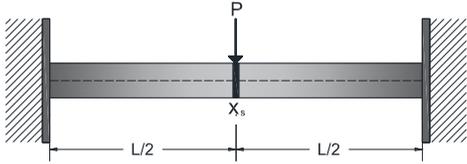
20. Martínez-Miranda A.U. y Juárez-Luna G. (2021), "Closed form solutions of the material failure process as hinges of beams by the embedded discontinuity model", *Mechanics of Materials*, **158**, 103844.
21. Nanakorn P. (2004), "A two-dimensional beam-column finite element with embedded rotational discontinuities", *Computers & Structures*, **82**, 753-762.
22. Oliver J., Huespe A.E., Pulido M.D.G. y Chaves E. (2002), "From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach", *Engineering Fracture Mechanics*, **69(2)**, 113-136.
23. Ortiz M., Leroy Y. y Needleman A. (1987), "A finite element method for localized failure analysis", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **61(2)**, 189-214.
24. Sanjayan J.G. y Darvall P.L. (1995), "Singularities in RC beam elements with finite-length hinges", *Journal of Structural Engineering*, **12**, 39-47.
25. Simo J.C. y Rifai, S. (1990), "A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes". *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **29(8)**, 1595-1638.
26. Simo J.C. y Oliver J. (1994), "A new approach to the analysis and simulation of strain softening in solids", In: Bazant, Z.P. et al. (Eds.), *Fracture and Damage in Quasibrittle Structures*, E. and F.N. Spon, London, 25-39.
27. Simo J.C., Oliver J. y Armero F. (1993), "An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids", *Computational Mechanics*, **12**, 277-296.
28. Tenorio-Montero E. y Juárez-Luna G. (2021), "Beam-column finite element with embedded discontinuities for modelling damage in reinforced concrete prismatic elements", *Structures*, **29**, 1934-1953.
29. Wells G.N. y Sluys L.J. (2001), "A new method for modelling cohesive cracks using finite elements", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **50(12)**, 2667-2682.
30. Wu J.-Y. (2013), "New enriched finite elements with softening plastic hinges for the modeling of localized failure in beams", *Computers & structures*, **128**, 203-218.
31. Yavari A. y Sarkani S. (2001), "On applications of generalised functions to the analysis of Euler-Bernoulli beam-columns with jump discontinuities", *International Journal of Mechanical Sciences*, **43(6)**, 1543-1562.
32. Yavari A., Sarkani S. y Moyer E.T. (2000), "On applications of generalised functions to beam bending problems", *International Journal of Solids and Structures*, **37(40)**, 5675-5705.

## A Anexo

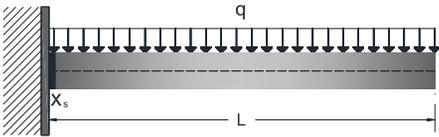
**Tabla A 1.** Soluciones en forma cerrada de vigas delgadas con discontinuidades que ablandan (tomado de Martínez-Miranda y Juárez-Luna, 2021)

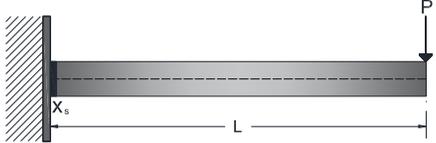
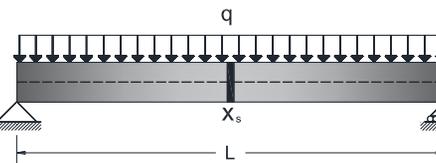
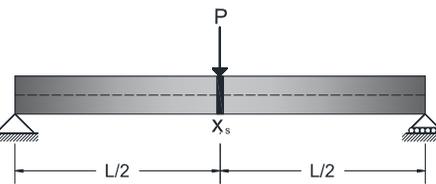
Elemento viga	Soluciones en forma cerrada
<p>a) Viga en voladizo con carga distribuida</p>  <p><math>w(0) = 0; \theta(0) = 0; M(L) = 0; V(L) = 0</math></p>	$w(x) = \frac{qx^2}{24EI}(x^2 - 4Lx + 6L^2) + [ \theta ]x$ $\theta(x) = \frac{qx}{2EI}\left(\frac{x^2}{3} - Lx + L^2\right) + [ \theta ]$ $\kappa(x) = \frac{q}{2EI}(x^2 - 2Lx + L^2) + [ \theta ]\delta(x)$ $M(x) = \frac{q}{2}(x^2 - 2Lx + L^2)$ $V(x) = q(x - L)$
<p>b) Viga en voladizo con carga concentrada</p>  <p><math>w(0) = 0; \theta(0) = 0; M(L) = 0; V(L) = -P</math></p>	$w(x) = \frac{Px^2}{6EI}(3L - x) + [ \theta ]x$ $\theta(x) = \frac{Px}{2EI}(2L - x) + [ \theta ]$ $\kappa(x) = \frac{P}{EI}(L - x) + [ \theta ]\delta(x)$ $M(x) = P(L - x)$ $V(x) = -P$
<p>c) Viga simplemente apoyada con carga distribuida</p>  <p><math>w(0) = 0; w(L) = 0; M(0) = 0; M(L) = 0</math></p>	$w(x) = \frac{qx}{24EI}(x^3 - 2Lx^2 + L^3)$ $- [ \theta ]\left(x - \frac{L}{2}\right)H\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{[ \theta ]x}{2}$ $\theta(x) = \frac{q}{24EI}(4x^3 - 6Lx^2 + L^3) + \frac{[ \theta ]}{2}$ $- [ \theta ]H\left(x - \frac{L}{2}\right)$ $\kappa(x) = \frac{q}{2EI}(x^2 - Lx) - [ \theta ]\delta\left(x - \frac{L}{2}\right)$ $M(x) = \frac{q}{2}(x^2 - Lx)$ $V(x) = q\left(x - \frac{L}{2}\right)$

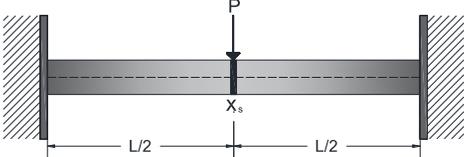
<p>d) Viga empotrada en un extremo y simplemente apoyada en el otro con carga distribuida</p>  <p><math>w(0) = 0; \theta(0) = 0; w(L) = 0; M(L) = 0</math></p>	$w(x) = \frac{qx^4}{24EI} + \left( \frac{3EI[ \theta ]}{L^2} - \frac{5qL}{8} \right) \frac{x^3}{6EI}$ $+ \left( \frac{qL^2}{8} - \frac{3EI[ \theta ]}{L} \right) \frac{x^2}{2EI} + [ \theta ]x$ $\theta(x) = \frac{qx^3}{6EI} + \left( \frac{3EI[ \theta ]}{L^2} - \frac{5qL}{8} \right) \frac{x^2}{2EI}$ $+ \left( \frac{qL^2}{8} - \frac{3EI[ \theta ]}{L} \right) \frac{x}{EI} + [ \theta ]$ $\kappa(x) = \frac{qx^2}{2EI} + \left( \frac{3EI[ \theta ]}{L^2} - \frac{5qL}{8} \right) \frac{x}{EI}$ $+ \left( \frac{qL^2}{8EI} - \frac{3[ \theta ]}{L} \right) + [ \theta ]\delta(x)$ $M(x) = \frac{q}{2} \left( x^2 - \frac{5Lx}{4} + \frac{L^2}{4} \right)$ $V(x) = q \left( x - \frac{5L}{8} \right)$
<p>e) Viga simplemente apoyada con carga concentrada</p>  <p><math>w(0) = 0; w(L) = 0; M(0) = 0; M(L) = 0</math></p>	$w(x) = \frac{P}{6EI} \left( x - \frac{L}{2} \right)^3 H \left( x - \frac{L}{2} \right) + \frac{Px}{4EI} \left( \frac{L^2}{4} \right.$ $\left. + \frac{[ \theta ]x}{2} - [ \theta ] \left( x - \frac{L}{2} \right) H \left( x - \frac{L}{2} \right) \right)$ $\theta(x) = \frac{P}{2EI} \left( x - \frac{L}{2} \right)^2 H \left( x - \frac{L}{2} \right) + \frac{P}{16EI} \left( L^2 - \right.$ $\left. + \frac{[ \theta ]}{2} - [ \theta ] H \left( x - \frac{L}{2} \right) \right)$ $\kappa(x) = \frac{P}{EI} \left( x - \frac{L}{2} \right) H \left( x - \frac{L}{2} \right) - \frac{Px}{2EI}$ $- [ \theta ] \delta \left( x - \frac{L}{2} \right)$ $M(x) = P \left( x - \frac{L}{2} \right) H \left( x - \frac{L}{2} \right) - \frac{Px}{2}$ $V(x) = PH \left( x - \frac{L}{2} \right) - \frac{P}{2}$

<p>f) Viga empotrada con carga concentrada</p>  <p><math>w(0) = 0; w(L) = 0; \theta(0) = 0; \theta(L) = 0</math></p>	$w(x) = \frac{P}{6EI} \left(x - \frac{L}{2}\right)^3 H\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{Px^2}{4EI} \left(\frac{L}{4} - \frac{x}{2}\right) + \frac{[ \theta ]x^2}{2L} - [ \theta ] \left(x - \frac{L}{2}\right) H\left(x - \frac{L}{2}\right)$ $\theta(x) = \frac{P}{2EI} \left(x - \frac{L}{2}\right)^2 H\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{Px}{4EI} \left(\frac{L}{2} - \frac{x}{2}\right) + \frac{[ \theta ]x}{L} - [ \theta ] H\left(x - \frac{L}{2}\right)$ $\kappa(x) = \frac{P}{EI} \left(x - \frac{L}{2}\right) H\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{P}{EI} \left(\frac{L}{8} - \frac{x}{2}\right) + \frac{[ \theta ]}{L} - [ \theta ] \delta\left(x - \frac{L}{2}\right)$ $M(x) = P \left(x - \frac{L}{2}\right) H\left(x - \frac{L}{2}\right) + P \left(\frac{L}{8} - \frac{x}{2}\right)$ $V(x) = PH \left(x - \frac{L}{2}\right) - \frac{P}{2}$
---	---

**Tabla A 2.** Soluciones en forma cerrada de vigas gruesas con discontinuidades que ablandan (tomado de Martínez-Miranda y Juárez-Luna, 2021)

Elemento viga	Soluciones en forma cerrada
<p>a) Viga en voladizo con carga distribuida</p>  <p><math>w(0) = 0; \theta(0) = 0; M(L) = 0; V(L) = 0</math></p>	$w(x) = \frac{qx^2}{24EI} (x^2 - 4Lx + 6L^2) + \frac{qx}{GA_s} \left(L - \frac{x}{2}\right) + [ \theta ]x + [ \omega ]$ $\theta(x) = \frac{qx}{2EI} \left(\frac{x^2}{3} - Lx + L^2\right) + [ \theta ]$ $\kappa(x) = \frac{q}{2EI} (x^2 - 2Lx + L^2) + [ \theta ] \delta(x)$ $\gamma(x) = \frac{q}{GA_s} (L - x) + [ \omega ] \delta(x)$ $M(x) = \frac{q}{2} (x^2 - 2Lx + L^2)$ $V(x) = q(x - L)$
<p>b) Viga en voladizo con carga concentrada</p>	$w(x) = \frac{Px^2}{6EI} (3L - x) + \frac{Px}{GA_s} + [ \theta ]x + [ \omega ]$ $\theta(x) = \frac{Px}{2EI} (2L - x) + [ \theta ]$

 <p><math>w(0) = 0; \theta(0) = 0; M(L) = 0; V(L) = -P</math></p>	$\kappa(x) = \frac{P}{EI}(L-x) + [ \theta ]\delta(x)$ $\gamma(x) = \frac{P}{GA_s} + [ \omega ]\delta(x)$ $M(x) = P(L-x)$ $V(x) = -P$
<p>c) Viga simplemente apoyada con carga distribuida</p>  <p><math>w(0) = 0; w(L) = 0; M(0) = 0; M(L) = 0</math></p>	$w(x) = \frac{qx}{24EI}(x^3 - 2Lx^2 + L^3) + \frac{qx}{2GA_s}(L - x) + \frac{[ \theta ]x}{2} - [ \theta ]\left(x - \frac{L}{2}\right)H\left(x - \frac{L}{2}\right)$ $\theta(x) = \frac{q}{24EI}(4x^3 - 6Lx^2 + L^3) + \frac{[ \theta ]}{2} - [ \theta ]H\left(x - \frac{L}{2}\right)$ $\kappa(x) = \frac{q}{2EI}(x^2 - Lx) - [ \theta ]\delta\left(x - \frac{L}{2}\right)$ $\gamma(x) = \frac{q}{GA_s}\left(\frac{L}{2} - x\right)$ $M(x) = \frac{q}{2}(x^2 - Lx)$ $V(x) = q\left(x - \frac{L}{2}\right)$
<p>d) Viga simplemente apoyada con carga concentrada</p>  <p><math>w(0) = 0; w(L) = 0; M(0) = 0; M(L) = 0</math></p>	$w(x) = \frac{P}{6EI}\left(x - \frac{L}{2}\right)^3 H\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{Px}{4EI}\left(\frac{L^2}{4} - x^2\right) + \frac{[ \theta ]x}{2} + \frac{P}{GA_s}\left[\frac{x}{2} - \left(x - \frac{L}{2}\right)H\left(x - \frac{L}{2}\right)\right] - [ \theta ]\left(x - \frac{L}{2}\right)H\left(x - \frac{L}{2}\right) - \frac{[ \omega x]}{L} + [ \omega ]H\left(x - \frac{L}{2}\right)$ $\theta(x) = \frac{P}{2EI}\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 H\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{P}{16EI}(L^2 - x^2) + \frac{[ \theta ]}{2} - [ \theta ]H\left(x - \frac{L}{2}\right) - \frac{[ \omega ]}{L}$ $\kappa(x) = \frac{P}{EI}\left(x - \frac{L}{2}\right)H\left(x - \frac{L}{2}\right) - \frac{Px}{2EI} - [ \theta ]\delta\left(x - \frac{L}{2}\right)$ $\gamma(x) = \frac{P}{2GA_s} - \frac{P}{GA_s}H\left(x - \frac{L}{2}\right) + [ \omega ]\delta\left(x - \frac{L}{2}\right)$

	$M(x) = P\left(x - \frac{L}{2}\right)H\left(x - \frac{L}{2}\right) - \frac{Px}{2}$ $V(x) = PH\left(x - \frac{L}{2}\right) - \frac{P}{2}$
<p>e) Viga empotrada con carga concentrada</p>  <p><math>w(0) = 0; w(L) = 0; \theta(0) = 0; \theta(L) = 0</math></p>	$w(x) = \frac{P}{6EI}\left(x - \frac{L}{2}\right)^3 H\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{Px^2}{4EI}\left(\frac{L}{4}\right)$ $+ \frac{[ \theta ]x^2}{2L} - [ \theta ]\left(x - \frac{L}{2}\right)H\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{[ w ]x^2}{6\eta EI}$ $+ \frac{1}{GA_s}\left[\frac{x}{2}\left(P - \frac{4[ w ]}{\eta L}\right) - P\left(x - \frac{L}{2}\right)H\left(x - \frac{L}{2}\right) + [ w ]H\left(x - \frac{L}{2}\right)\right]$ $\theta(x) = \frac{P}{2EI}\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 H\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{Px}{4EI}\left(\frac{L}{2}\right)$ $+ \frac{[ \theta ]x}{L} - [ \theta ]H\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{[ w ]x}{\eta EI}\left(\frac{x}{L} - \frac{1}{2}\right)$ <p>donde,</p> $\eta = \frac{L^2}{6EI} + \frac{2}{GA_s}$ $\kappa(x) = \frac{P}{EI}\left(x - \frac{L}{2}\right)H\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{P}{EI}\left(\frac{L}{8} - \frac{x}{2}\right)$ $- [ \theta ]\delta\left(x - \frac{L}{2}\right) + \frac{[ w ]}{\eta EI}\left(\frac{2x}{L} - 1\right)$ $V(x) = \frac{1}{GA_s}\left[\frac{P}{2} - PH\left(x - \frac{L}{2}\right) - \frac{2[ w ]}{\eta L}\right]$ $+ [ w ]\delta\left(x - \frac{L}{2}\right)$ $M(x) = P\left(x - \frac{L}{2}\right)H\left(x - \frac{L}{2}\right) + P\left(\frac{L}{8} - \frac{x}{2}\right)$ $V(x) = PH\left(x - \frac{L}{2}\right) - \frac{P}{2}$