

## **RESPUESTA DE TANQUES CON BASE AISLADA BAJO SISMOS IMPULSIVOS**

### **RESPONSE OF TANK WITH ISOLATED BASE UNDER IMPULSIVE EARTHQUAKES**

**Juan Pablo Cordone**

CeReDeTeC, Facultad Regional Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional  
Rodríguez 273, Mendoza, Argentina  
Correo Electrónico: [juanpablo.cordone@frm.utn.edu.ar](mailto:juanpablo.cordone@frm.utn.edu.ar)

**Miguel Tornello**

CeReDeTeC, Facultad Regional Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional  
Rodríguez 273, Mendoza, Argentina  
Correo Electrónico: [mtornell@frm.utn.edu.ar](mailto:mtornell@frm.utn.edu.ar)

#### **RESUMEN**

El comportamiento de tanques para almacenamiento de líquidos peligrosos ha demostrado su vulnerabilidad frente a terremotos destructivos. Su colapso conduce al derrame de las sustancias contenidas (inflamables, explosivas, tóxicas) impactando negativamente en el medio ambiente circundante y provocando grandes pérdidas económicas para la región donde se encuentran emplazados. El objetivo de este trabajo es determinar la efectividad de los sistemas de aislación sísmica en tanques cilíndricos apoyados que almacenan líquidos peligrosos, y medir la incidencia de determinados parámetros sobre la respuesta. Para lograr esto, es necesario realizar un análisis paramétrico de la historia de la respuesta, con múltiples corridas y un costo computacional elevado. Por ello, en este artículo se propone un método simple y rápido, basado en la resolución del problema a través de la Ecuación de Euler-Lagrange. Como dispositivos de aislamiento se utilizaron aisladores friccionales de simple péndulo de fricción. Como input se utilizaron terremotos con características de movimientos sísmicos impulsivos. Se modelaron un tanque con base fija y otro con base aislada, y se usaron como parámetros de estudio la relación de esbeltez del tanque y, el período y el coeficiente de fricción del sistema de aislación sísmica. Se determinaron las respuestas sísmicas en términos de desplazamientos de la superficie libre del líquido contenido, desplazamientos del sistema de aislación y corte basal normalizado. Los resultados indican que el sistema de aislamiento reduce la respuesta máxima en todos los casos, pero la misma está fuertemente condicionada por las características del registro impulsivo.

**Palabras Claves:** aislamiento sísmico, respuesta sísmica, tanques cilíndricos,

## ABSTRACT

The behavior of tanks for hazardous liquid storage has demonstrated their vulnerability to destructive earthquakes. Their collapse leads to the spillage of the contained substances (flammable, explosive, toxic) negatively impacting in the surrounding environment and causing big economic losses for the region where they are located. This work's goal is to determine the effectiveness of the systems of seismic isolation in supported cylindrical tanks, which store hazardous liquids, and to measure the incidence of certain parameters over the response. In order to achieve this, it is necessary to perform a parametric analysis of the response history, with multiple runs and with a high computational cost. Due to that, a simple and fast method, based on the resolution of the problem through an Euler-Lagrange Equation is proposed in this article. As isolation devices, friction isolators of single friction pendulum were used. As an input, earthquakes with impulsive seismic movement characteristics were used. Both a base fixed and a base isolated tank were modeled, and as study parameters, the slenderness ratio of the tank and the period and the friction coefficient of the seismic isolation system were modeled. The seismic responses in terms of displacements of the free surface of the contained liquid, displacements of the isolation system and the normalized base shear were determined. The results state that the isolation system reduces the maximum response in all cases, but it is strongly conditioned by the characteristics of the impulsive record.

**Keywords:** seismic isolation, seismic response, cylindrical tank

## 1 INTRODUCCIÓN

El comportamiento de tanques para almacenamiento de líquidos peligrosos han demostrado su vulnerabilidad frente a terremotos destructivos, tales como los ocurridos en Valdivia, Chile en 1960; Alaska, Estados Unidos en 1964; Northridge, California, Estados Unidos, en 1994; Kobe, Japón en 1995; y Kocaeli, Turquía en 1999, entre otros. Su colapso conduce al derrame de las sustancias contenidas impactando negativamente en el medio ambiente circundante y provocando grandes pérdidas económicas para la región donde se encuentran emplazados. Esto motiva el estudio del comportamiento sísmico de los tanques, y el desarrollo de nuevas técnicas para su protección, tales como la aislación sísmica de base.

El comportamiento sísmico de tanques ha sido estudiado desde hace varios años por muchos autores. En 1933, Westergaard [1] determinó la distribución de presiones de un fluido incompresible sobre una presa rígida de pared vertical durante un terremoto. Posteriormente, en 1949 Jacobsen [2] determinó la velocidad potencial de un tanque con fluido dentro y alrededor del mismo cuando experimenta en su base un desplazamiento traslacional impulsivo, despreciando la parte convectiva de la aceleración. Años más tarde, en 1957 y 1963, Housner [3, 4] propuso ecuaciones simplificadas para contenedores de distintas formas y para ello realizó un análisis de la presión hidrodinámica desarrollada cuando un fluido contenido en un recipiente de paredes rígidas es sujeto a aceleraciones horizontales, incluyendo presiones impulsivas y convectivas. En 1973, Veletsos [5] desarrolló un procedimiento simplificado para evaluar las fuerzas dinámicas inducidas por la componente lateral de un terremoto, teniendo en cuenta los efectos de flexibilidad del tanque, pero considerando sólo las fuerzas impulsivas. Luego, en 1981 y 1983, Haroun [6, 7] presentó un método basado en la superposición de los modos de vibración lateral libre para evaluar la influencia de la flexibilidad de la pared en la respuesta sísmica de un tanque.

En cuanto a la técnica del aislamiento sísmico aplicada a tanques se puede citar los trabajos de Malhotra [8] los cuales demostraron que la respuesta sísmica de tanques aislados se reduce considerablemente sin un incremento significativo del oleaje en la superficie libre. En 2001, Wang [9] realizó simulaciones numéricas de tanques con aisladores de péndulo de fricción (FPS), comprobando que su efectividad se incrementa conforme aumenta la relación de esbeltez del tanque. En 2002, Shrimali y Jangid [10] realizaron un análisis paramétrico sobre un tanque ancho y otro esbelto, para medir la incidencia del período de aislación, el amortiguamiento y la fuerza de fluencia del sistema de aislación sobre la respuesta pico del tanque, bajo una excitación bidireccional considerando los efectos de interacción, los cuales resultaron despreciables. En 2008 y 2012, Panchal y Jangid [11, 12] estudiaron la respuesta frente a sismos de falla cercana, de tanques aislados con dos dispositivos FPS novedosos, uno con coeficiente de fricción variable con el desplazamiento (VFPS) y otro con radio de curvatura variable con el desplazamiento (VCFPS), demostrando mejor comportamiento que los FPS con coeficiente de fricción y radio de curvatura constantes con el desplazamiento. En 2010, Abali y Uçkan [13] realizaron un análisis paramétrico de tanques con aisladores FPS, para medir la incidencia del período de aislación, la relación de

aspecto del tanque y el coeficiente de fricción, en la respuesta del tanque, considerando la variación de la carga axial sobre el sistema de aislación debido al momento de vuelco y la aceleración vertical, y encontrando que no debe ignorarse dicha variación fundamentalmente en tanques esbeltos sometidos a sismos de falla cercana. En 2014, Saha [14] realizó un análisis paramétrico para evaluar la respuesta de un tanque ancho y otro esbelto, utilizando aisladores modelados en forma lineal equivalente y en forma bilineal, mostrando que el modelo lineal equivalente sobreestima la respuesta de tanques esbeltos.

El objetivo de este trabajo es evaluar la efectividad de los sistemas de aislación sísmica en tanques, y medir la incidencia de determinados parámetros (período de aislación, coeficiente de fricción y relación de esbeltez) sobre la respuesta. Para lograr esto, es necesario realizar un análisis paramétrico de la historia de la respuesta, con múltiples corridas y un costo computacional elevado. Por ello, en este artículo se propone un método simple y rápido, basado en la resolución del problema a través de la Ecuación de Euler-Lagrange.

## 2 METODOLOGÍA

Para lograr el objetivo planteado se siguen los siguientes pasos: i) elegir un modelo que represente el comportamiento físico del sistema: se usa el Modelo de Housner; ii) encontrar las ecuaciones diferenciales que gobiernan el sistema: se plantea la Ecuación de Euler-Lagrange, que conduce a dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden; iii) reducir el orden de las ecuaciones diferenciales: se usa la Ecuación de Estado, que permite pasar de dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden a cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden; iv) integrar las ecuaciones diferenciales: se emplea el método de integración numérica Runge Kutta de orden tres a paso constante.

### 2.1 Modelo de Housner

El modelo de Housner propone que la respuesta hidrodinámica de un sistema tanque-líquido se caracteriza por la participación de dos contribuciones diferentes, llamadas componente impulsiva y componente convectiva. La componente impulsiva representa la porción de líquido que se mueve al unísono con las paredes del tanque. La componente convectiva representa el líquido que se mueve con un movimiento de oleaje de período grande en la porción superior del tanque. Estas dos componentes pueden considerarse desacopladas, porque hay diferencias significativas en sus períodos naturales.

En un tanque apoyado sobre el suelo la amplitud del oleaje es un indicador de la intensidad del movimiento del suelo. Si un tanque con una superficie libre de agua se somete a una aceleración horizontal del suelo  $\ddot{X}(t)$ , las fuerzas ejercidas sobre el tanque por el agua son de dos tipos. Primero, cuando las paredes del tanque se aceleran, van y vuelven, y una parte del agua es forzada a participar en este movimiento, el cual ejerce una fuerza reactiva sobre el tanque, la misma que ejercería una masa  $m_i$  conectada rígidamente al tanque a una altura apropiada  $h_i$ . La masa  $m_i$  es fijada a la altura  $h_i$  de modo que la fuerza horizontal ejercida por esta

sea colineal con la fuerza resultante ejercida por el agua equivalente. Segundo, el movimiento de la pared del tanque excita el agua en oscilaciones las cuales sucesivamente ejercen una fuerza oscilatoria sobre el tanque. Esta fuerza oscilatoria es la misma que ejercería una masa  $m_c$  que puede oscilar horizontalmente contra un resorte de restricción. La masa  $m_c$  corresponde al modo de oscilación fundamental del agua, que es el modo más importante en la mayoría de los problemas sísmicos. Si el sistema equivalente es sujeto a aceleraciones sísmicas del suelo  $\ddot{X}(t)$ , las fuerzas ejercidas sobre el tanque por las masas  $m_i$  y  $m_c$  serán las mismas que ejercería el agua sobre el tanque. En la figura 1 se esquematiza el modelo descrito.

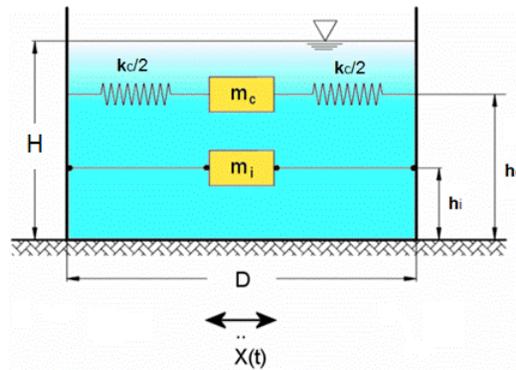


Figura 1 Modelo de Housner

Para un tanque cilíndrico de radio R, y altura de líquido H, las ecuaciones para obtener los parámetros necesarios del modelo son:

$$m_i = M \frac{\tanh\left(\frac{1.732 R}{H}\right)}{\left(\frac{1.732 R}{H}\right)} \quad (1)$$

$$m_c = 0.835 M \frac{\tanh\left(\frac{1.835 H}{R}\right)}{\left(\frac{1.835 H}{R}\right)} \quad (2)$$

$$\omega_c^2 = 1.835 \frac{g}{R} \tanh\left(\frac{1.835 H}{R}\right) \quad (3)$$

$$k_c = \omega_c^2 m_c = 4.032605 \frac{m_c^2}{M} \frac{g H}{R^2} \quad (4)$$

$$h_i = \frac{3}{8} H \quad (5)$$

$$h_c = H \left[ 1 - \left(\frac{R}{1.835 H}\right) \tanh\left(\frac{0.9175 H}{R}\right) \right] \quad (6)$$

Dónde: R = radio del cilindro del tanque; H = altura del líquido;  $\rho$  = densidad del líquido;  $m = \rho \pi R^2 H$  masa del líquido contenido;  $m_i$  = masa impulsiva;  $m_c$  =

masa convectiva;  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  aceleración de la gravedad;  $k_c =$  rigidez convectiva;  $h_i =$  altura impulsiva;  $h_c =$  altura convectiva

## 2.2 Ecuación de Euler – Lagrange

La Ecuación de Euler – Lagrange se obtiene aplicando el Principio de los Trabajos Virtuales a la Segunda Ley de Newton. El Principio de Trabajos Virtuales (PTV) establece que *“En un sistema mecánico, es condición necesaria y suficiente de equilibrio que el trabajo del conjunto de fuerzas aplicadas sobre desplazamientos virtuales compatibles con los vínculos sea nulo”*. Para un sistema de  $M$  puntos materiales, el trabajo virtual total es:

$$\delta W = \sum_{i=1}^M \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (7)$$

Por otro lado, la segunda ley de Newton establece que:

$$\mathbf{F}_i = \dot{\mathbf{p}}_i \quad (8)$$

donde  $\mathbf{p}_i$  es el momentum lineal de la partícula  $i$ -ésima. De la expresión (8) se puede escribir:

$$\boldsymbol{\varphi}_i = \mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i = 0 \quad (9)$$

donde  $\boldsymbol{\varphi}_i$  se puede interpretar como la fuerza neta que habría que aplicar sobre la partícula para mantenerla en “equilibrio”. Entonces, como en todo instante el sistema se mantiene en equilibrio bajo la acción de  $\boldsymbol{\varphi}_i$  se cumple el principio de los trabajos virtuales:

$$\sum_{i=1}^M \boldsymbol{\varphi}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^M (\mathbf{F}_i - \dot{\mathbf{p}}_i) \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^M \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i - \sum_{i=1}^M \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = 0 \quad (10)$$

Desarrollando el primer término de (10) obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^M \mathbf{F}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^M \mathbf{F}_i \cdot \left( \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j \right) = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \left( \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j \\ &= \sum_{j=1}^N Q_j \delta q_j \end{aligned} \quad (11)$$

donde  $q$   $[N \times 1]$  es el vector de grados de libertad del sistema (GDL), siendo  $N$  el número de grados de libertad; y  $Q_j = \sum_{i=1}^M \left( \mathbf{F}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right)$  son las componentes de las fuerzas generalizadas.

A continuación, se desarrolla el segundo término de (10):

$$\sum_{i=1}^M \dot{\mathbf{p}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^M m_i \dot{\mathbf{r}}_i \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \partial q_j = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \partial q_j \quad (12)$$

De la regla de la derivación del producto interior, tenemos:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} = \frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt} \quad (13)$$

Usando  $\mathbf{a} = m_i \dot{\mathbf{r}}_i$  y  $\mathbf{b} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}$  se obtiene:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \left\{ \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right\} \partial q_j \quad (14)$$

Si consideramos las siguientes igualdades:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (16)$$

Entonces, reemplazando (15) y (16) en (14):

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \left\{ \frac{d}{dt} \left( m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) \right\} \partial q_j \quad (17)$$

Además:

$$m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j} \quad (18)$$

$$m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = \frac{\partial T_i}{\partial q_j} \quad (19)$$

Donde  $T_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$  es la energía cinética de la partícula  $i$ -ésima. Luego, reemplazando (18) y (19) en (17):

$$\sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^M \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T_i}{\partial q_j} \right\} \partial q_j = \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \partial q_j \quad (20)$$

Reemplazando (11) en el primer término de (10), y (20) en el segundo término de (10), se obtiene:

$$\sum_{j=1}^N Q_j \partial q_j - \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} \right\} \partial q_j = 0 \quad (21)$$

$$\sum_{j=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right\} \delta q_j = 0 \quad (22)$$

En la ecuación (22)  $Q_j$  puede descomponerse como la suma de las fuerzas conservativas (derivadas de una función potencial) y las no conservativas:

$$Q_j = Q_j^C + Q_j^{NC} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + \sum_{i=1}^M \mathbf{F}_i^{NC} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \quad (23)$$

Reemplazando (23) en (22):

$$\sum_{j=1}^N \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} - Q_j^{NC} \right] \delta q_j = 0 \quad (24)$$

Como los desplazamientos virtuales son arbitrarios, para que se cumpla la ecuación (24) cada término debe ser nulo, es decir:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} - Q_j^{NC} = 0 \quad (25)$$

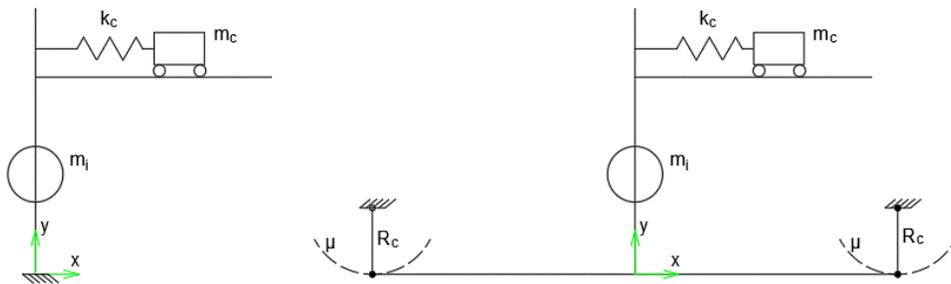
La ecuación anterior representa una suma de fuerzas en equilibrio. Para aplicarla, se calcula la energía total (cinética  $T$  y potencial  $V$ ) del sistema (escalar) y se deriva respecto a las coordenadas generalizadas  $q$  (número mínimo de coordenadas independientes necesarias para describir el sistema = número de grados de libertad), y se suman también las fuerzas no conservativas  $Q^{NC}$ , para obtener de este modo las ecuaciones diferenciales que gobiernan el sistema.

Los pasos a seguir para formular el problema en términos de la Ecuación de Euler – Lagrange son los siguientes: i) elegir un origen de coordenadas; ii) definir los grados de libertad; iii) definir vectores de posición y velocidad; iv) calcular la energía cinética; v) calcular la energía potencial (elástica más gravitatoria); vi) calcular las fuerzas no conservativas; vii) armar la ecuación.

### 2.2.1 Origen de coordenadas

El problema de un tanque con base fija y otro con base aislada, puede ser idealizado mediante los siguientes esquemas, a través de la colocación de dos masas puntuales (impulsiva y convectiva) de acuerdo al Modelo de Housner. Los aisladores FPS pueden ser caracterizados por el radio de curvatura de una superficie cóncava, que define el período de aislación, y por el coeficiente de fricción en la superficie de deslizamiento, que define la disipación de energía y amortiguamiento del sistema, y que si bien es variable en el tiempo con la velocidad de deslizamiento y la presión de contacto, para este caso se supone constante. El aislador se modela mediante una barra rígida con el mismo radio que la superficie cóncava de deslizamiento, dicha barra está articulada en ambos extremos y conectada a otra barra horizontal rígida que representa la base del tanque, donde luego se empotra una barra vertical rígida que representa las paredes del tanque anclado, y que se conecta a las dos masas de Housner que representan el líquido

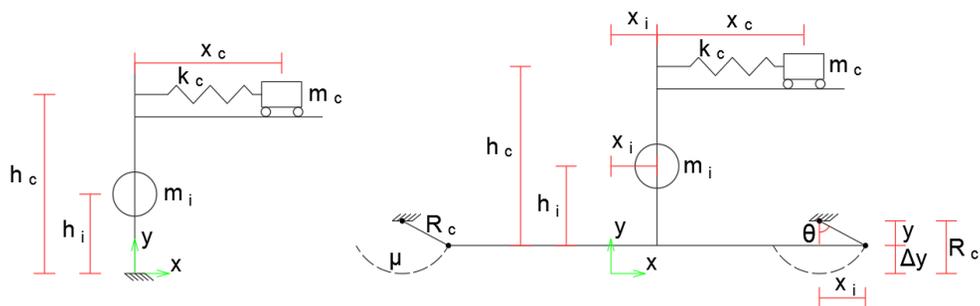
contenido. El origen de coordenadas se coloca en la unión entre la barra vertical rígida (pared) y la barra horizontal rígida (fondo), tal como se muestra en la figura 2.



**Figura 2** Esquema simplificado del tanque: base fija (izquierda) y base aislada (derecha)

### 2.2.2 Grados de libertad

El problema del tanque aislado presenta dos grados de libertad, que se corresponden con los desplazamientos horizontales de las dos masas, la impulsiva (porción de agua inferior y media que se mueve junto con las paredes rígidas del tanque) con desplazamiento  $x_i$  generado por el movimiento pendular del sistema de aislación al ser excitado por un sismo, y la convectiva (porción de agua superior que oscila y genera oleaje en la superficie libre) con desplazamiento  $x_c$ . Para el caso del tanque con base fija sólo existe un grado de libertad o desplazamiento independiente, que corresponde a la masa convectiva, ya que la masa impulsiva al estar rígidamente fija a las paredes del tanque y éstas a su vez ancladas a la base, tiene un desplazamiento coincidente con el del suelo durante un terremoto. Esto se observa con claridad al dibujar los esquemas anteriores en posición deformada, en la figura 3.



**Figura 3** Grados de libertad: base fija (izquierda) y base aislada (derecha)

A partir de aquí se seguirá el desarrollo sólo para el caso del tanque aislado con dos grados de libertad. El caso del tanque con base fija y un solo grado de libertad puede obtenerse fácilmente a partir del primero o incluso puede forzarse el modelo de base aislada para que funcione como base fija, colocando un radio de curvatura  $R_c \approx 0$  y un coeficiente de fricción  $\mu = PGA$ .

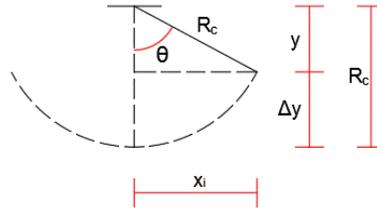
Los grados de libertad, en términos de desplazamiento, velocidad y aceleración, son:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} x_i \\ x_c \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\mathbf{q}_v = \begin{bmatrix} v_i \\ v_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{q}_a = \begin{bmatrix} a_i \\ a_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{x}_c \end{bmatrix} \quad (28)$$

La rotación  $\theta$  y el desplazamiento vertical  $\Delta y$  que generan los aisladores FPS debido a su movimiento pendular, pueden ser definidos en función del desplazamiento  $x_i$  de la masa impulsiva.



**Figura 4** Desplazamientos y rotaciones en el aislador FPS

A partir de la ecuación de una circunferencia se despeja “y”:

$$x_i^2 + y^2 = R_c^2 \quad (29)$$

$$y = \sqrt{R_c^2 - x_i^2} \quad (30)$$

A partir de la figura 4 se obtienen  $\Delta y$  y  $\theta$ :

$$\Delta y = R_c - y = R_c - \sqrt{R_c^2 - x_i^2} \quad (31)$$

$$\text{sen}\theta = \frac{x_i}{R_c} \quad (32)$$

$$\theta = \text{arcsen}\left(\frac{x_i}{R_c}\right) \quad (33)$$

### 2.2.3 Vectores de posición y velocidad

Se define la posición de las masas impulsiva y convectiva, respecto al origen de coordenadas elegido, y en función de los grados de libertad asignados, llamando  $r_i$  al vector de posición impulsivo y  $r_c$  al convectivo. La coordenada “y” se obtiene como la altura  $h$  respectiva más el desplazamiento vertical  $\Delta y$  que provocan los aisladores.

$$\mathbf{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ h_i + R_c - \sqrt{R_c^2 - x_i^2} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\mathbf{r}_c = \begin{bmatrix} x_i + x_c \\ h_c + R_c - \sqrt{R_c^2 - x_i^2} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Los vectores de velocidad se obtienen a partir de los anteriores mediante el uso del Jacobiano J para obtener las derivadas de los vectores de posición respecto a los grados de libertad.

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{r}^T}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}} \quad (36)$$

### 2.2.4 Energía cinética

Se calcula la energía cinética para cada masa del sistema con su respectivo vector de velocidad.

$$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{k=1}^L \frac{1}{2} \dot{\mathbf{r}}_k^T m_k \dot{\mathbf{r}}_k = \sum_{k=1}^L \frac{1}{2} (\mathbf{J}_k \dot{\mathbf{q}})^T m_k (\mathbf{J}_k \dot{\mathbf{q}}) \quad (37)$$

### 2.2.5 Energía potencial

Se calcula la energía potencial gravitatoria  $V_g$  (presente en las dos masas al levantarse por efecto de los aisladores) y la energía potencial elástica  $V_s$  (presente en el resorte de la masa convectiva). Luego se suman las dos contribuciones.

$$V_g(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^L m_k g r_{2,k} \quad (38)$$

$$V_s(\mathbf{q}) = \sum_{k=1}^L \frac{1}{2} u_k^T m_k u_k \quad (39)$$

### 2.2.6 Fuerzas no conservativas

En este problema aparecen dos fuerzas no conservativas que disipan energía, la fuerza  $F_a$  de amortiguamiento en el movimiento convectivo del agua y la fuerza  $F_r$  correspondiente al rozamiento en los aisladores de péndulo de fricción:

$$F_a = -c_c v_c \text{sign}(v_c) \quad (40)$$

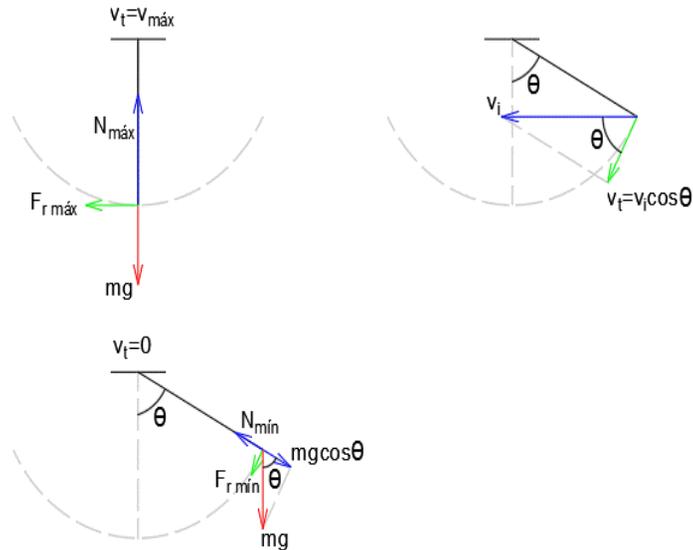
$$c_c = 2m_c \omega_c \xi_c \quad (41)$$

$$F_r = -\mu N \text{sign}(v_i) \quad (42)$$

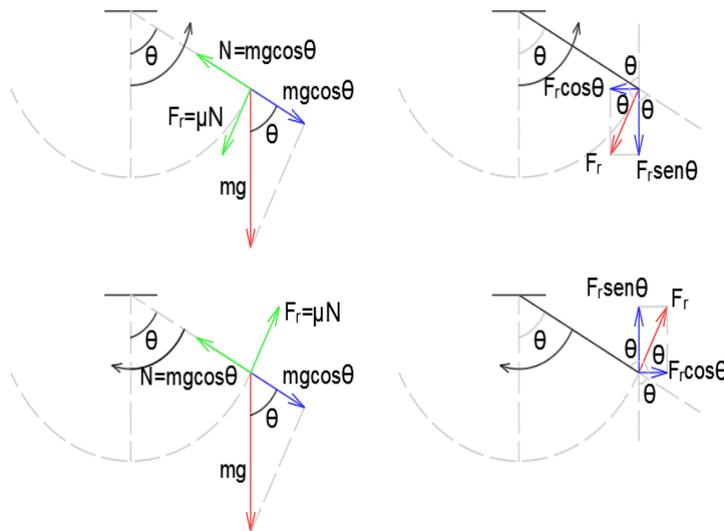
$$N = mg \cos \theta + \frac{mv_t^2}{R} = m \left[ g \cos \theta + \frac{(v_i \cos \theta)^2}{R} \right] \quad (43)$$

Estas fuerzas se deben proyectar respecto a los grados de libertad, para ello se calcula el trabajo que realizan (vector posición del punto de aplicación por vector fuerza) y luego se deriva respecto a los grados de libertad.

La fuerza de rozamiento del péndulo merece un análisis más detallado. La fuerza normal interviniente varía inversamente con el ángulo de rotación  $\theta$  y es la suma de la componente radial del peso y la fuerza centrípeta. El sentido de la fuerza de rozamiento es contrario al de la velocidad.



**Figura 5** Magnitud de la fuerza de rozamiento y descomposición de la velocidad en el plano (izquierda)



**Figura 6** Sentido de la fuerza de rozamiento y descomposición de la fuerza en el plano (derecha)

### 2.2.7 Ecuación de Euler Lagrange

La Ecuación de Euler-Lagrange se puede interpretar como la suma de distintos términos de fuerzas en equilibrio, ya que las energías del sistema se derivan respecto a los grados de libertad:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} = Q_j^{NC} \quad \rightarrow \quad A - B + C = D \quad (44)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial q_j} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j \quad \rightarrow \quad A = A1 + A2 \quad (45)$$

Agregando la fuerza sísmica externa  $F_s$  a la suma de la fuerza total EL queda:

$$EL = A1 + A2 - B + C - D + F_s \quad (46)$$

En virtud que el sistema debe estar en equilibrio dinámico, la suma de todas las fuerzas internas y externas deber ser nula, por lo que:

$$EL = A1 + A2 - B + C - D + F_s = 0 \quad (47)$$

Así se obtienen dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, dado que el problema presenta dos grados de libertad.

### 2.3 Ecuación de Estado

A partir de las dos ecuaciones de Euler-Lagrange obtenidas, se busca despejar la aceleración de las masas impulsiva y convectiva. Para ello se arma una matriz lineal L colocando los términos que acompañan a las aceleraciones buscadas. Esta matriz es la matriz de masa evaluada en  $q=0$ . Luego la parte no lineal de las ecuaciones se puede expresar como:

$$NL = EL - a.L \quad (48)$$

Recordando que  $EL=0$  se puede despejar la aceleración como:

$$a = -L^{-1}.NL \quad (49)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_i, x_c, \dot{x}_i, \dot{x}_c) \\ f_2(x_i, x_c, \dot{x}_i, \dot{x}_c) \end{bmatrix} \quad (50)$$

Haciendo un cambio a variables de estado y sus derivadas, se puede llevar el problema a una Ecuación de Estado de la forma:

$$\dot{X}(t) = A.X(t) + B.f(t) \quad (51)$$

Donde X es el vector de estado, f el vector de input (aceleración del suelo), A la matriz de estado y B la matriz de input. De esta forma en vez de resolver dos ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden se resuelven cuatro ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x}_c \\ \ddot{x}_i \\ \ddot{x}_c \end{bmatrix} = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_i \\ x_c \\ \dot{x}_i \\ \dot{x}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{x}_c \\ f_1(x_i, x_c, \dot{x}_i, \dot{x}_c) \\ f_2(x_i, x_c, \dot{x}_i, \dot{x}_c) \end{bmatrix} \quad (52)$$

El problema se puede resolver ahora integrando las cuatro ecuaciones diferenciales y definiendo cuatro condiciones iniciales de las variables buscadas. Así se obtienen los dos desplazamientos (impulsivo y convectivo) del sistema y sus respectivas velocidades.

## 2.4 Integración numérica

Se emplea el método de Runge Kutta explícito de orden 3:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(K_1 + 2K_2 + K_3) \quad (53)$$

$$K_1 = f(t_n, y_n) = f_n \quad (54)$$

$$K_2 = f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + K_1 \frac{h}{2}\right) \quad (55)$$

$$K_3 = f(t_n + h, y_n - K_1 h + 2K_2 h) \quad (56)$$

Este método permite integrar numéricamente las ecuaciones diferenciales. El siguiente valor ( $y_{n+1}$ ) es determinado por el presente valor ( $y_n$ ) más el producto del tamaño del intervalo ( $h$ ) por una pendiente estimada. La pendiente es un promedio ponderado de pendientes, donde  $K_1$  es la pendiente al principio del intervalo;  $K_2$  es la pendiente en el punto medio del intervalo, usando  $K_1$  para determinar el valor de "y" en el punto  $t_n+h/2$  mediante el método de Euler; y  $K_3$  es la pendiente al final del intervalo, con el valor de "y" determinado por  $K_2$ . Se promedian las tres pendientes asignando mayor peso a la pendiente en el punto medio.

## 2.5 Sistema de aislación FPS

Los aisladores de péndulo friccional son los más recomendables para colocar en la base de tanques de almacenamiento de líquidos, dado que el período de aislación  $T_b$  depende sólo del radio de curvatura  $R_c$  de la superficie cóncava de deslizamiento, por lo que se mantiene constante, aunque cambie el peso del tanque debido a variaciones en el nivel del líquido contenido. El período de aislación se obtiene como:

$$T_b = 2\pi \sqrt{\frac{R_c}{g}} \quad (57)$$

La fuerza desarrollada en el aislador es la suma de una fuerza restitutiva, generada por la componente tangencial del peso  $W$  actuando sobre la superficie curva, y una fuerza de rozamiento, provocada por la reacción de la componente normal del peso actuando sobre la superficie curva. La fuerza restitutiva controla la rigidez del sistema en función del radio de curvatura  $R_c$  de la superficie cóncava de deslizamiento, y la fuerza de rozamiento controla el amortiguamiento del sistema en

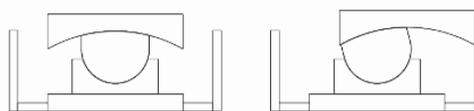
función del coeficiente de fricción  $\mu$  entre el deslizador y la superficie cóncava de deslizamiento.

$$F_b = \frac{W}{R_c} x + \mu W \text{ sign } \dot{x} \tag{58}$$

Durante el funcionamiento del aislador, la carga axial  $W$  puede variar por la adición al peso de los efectos de incremento sísmico que genera el momento de vuelco de la estructura, y por la componente vertical de la aceleración del suelo. Por otro lado, el coeficiente de fricción  $\mu$  puede variar de acuerdo a la velocidad de deslizamiento y a la presión normal sobre la superficie de deslizamiento. En este artículo, por simplicidad, no se consideran dichas variaciones y se asumen como valores constantes. Un análisis más completo, para futuras investigaciones, debería incluirlos.

El coeficiente de fricción se incrementa rápidamente con la velocidad de deslizamiento hasta un cierto valor más allá del cual se mantiene casi constante. Para el caso de contacto entre un deslizador de teflón y una superficie de deslizamiento de acero inoxidable, este efecto se explica de la siguiente forma. Para velocidades bajas y después del ciclo inicial, una capa muy fina de teflón se transfiere al acero inoxidable y el deslizamiento ocurre entre teflón y teflón. Para altas velocidades, grandes escamas de teflón son removidas de la superficie y molidas en la interfase de deslizamiento sin transferirse al acero, lo que resulta en un aumento de la fricción. El aumento del coeficiente de fricción con la velocidad tiende a estabilizarse a velocidades del orden de 10 cm/s.

Por otro lado, el coeficiente de fricción se reduce con el incremento de la presión de contacto sobre el deslizador hasta un valor límite más allá del cual permanece constante. El efecto del coeficiente de fricción con la presión es menos intuitivo. Al aumentar la presión entre las caras del material, el aumento del área de contacto es menor que el incremento en la carga normal, y por lo tanto el aumento en la fuerza de fricción es menor que el aumento en la carga vertical, y dado que el coeficiente de fricción es el cociente entre la fuerza de fricción y la carga vertical, su valor disminuye.



**Figura 7** Corte transversal de un aislador FPS de simple curvatura, con  $x=0$  (izq.) y  $x=x_{\text{máx}}$  (der.)

### 2.6 Análisis paramétrico

En los pasos 2.1 a 2.4 se explica el método utilizado para resolver el problema. Dichos pasos han sido programados en el software MATLAB para permitir una rápida aplicación del método cuando se modifican los datos del problema. La rutina correspondiente se incluye en el Anexo A. En este artículo se realiza un análisis paramétrico para determinar la incidencia del período de

aislación, el coeficiente de fricción de los aisladores FPS y la relación de esbeltez (H/R) del tanque en la respuesta sísmica de este último cuando tiene su base aislada. También se analiza la efectividad del sistema de aislación comparando la respuesta del tanque con base fija. Se adoptan distintos valores para los parámetros mencionados. Para el período de aislación se toman 3.0s, 3.5s, 4.0s y 4.5s. Para el coeficiente de fricción se toman 0.05, 0.10, 0.15 y 0.20. Para la relación de esbeltez se toman 0.5, 1.0, 1.5 y 2.0. Se utilizan como input para el sistema cuatro registros sísmicos con características impulsivas, a fin de realizar un análisis de la historia de la respuesta. Los registros usados y sus parámetros característicos se indican en la Tabla 1.

**Tabla 1** Registros sísmicos usados en el análisis

Lugar del Terremoto	Estación de registro	Magnitud Momento (Mw)	PGA [g]	PGV [m/s]	Período pulso [s]
Northridge, EE UU	Sylmar Hospital	6.7	0.84	1.29	0.76
Chichi, China	Chichi	7.6	0.81	1.26	1.13
Cape Mendocino, EE UU	Petrolia	7.0	0.66	0.90	0.68
Imperial Valley, EE UU	El Centro array #6	6.5	0.44	1.10	1.27

Se cuantifica la respuesta tomando como output el desplazamiento relativo de la masa convectiva ( $x_c$ ), el desplazamiento relativo del sistema de aislación ( $x_b$ ) que por las consideraciones realizadas en el modelo (conexión rígida de la base del tanque a las paredes también rígidas) es igual al desplazamiento de la masa impulsiva ( $x_i$ ), y el corte basal normalizado (que puede interpretarse como el coeficiente sísmico o aceleración efectiva del sistema en la base expresada como fracción de la aceleración de la gravedad). Este último parámetro se obtiene para el caso de base aislada a partir de la expresión (58) y para el caso de base fija a partir de la ecuación propuesta por Housner:

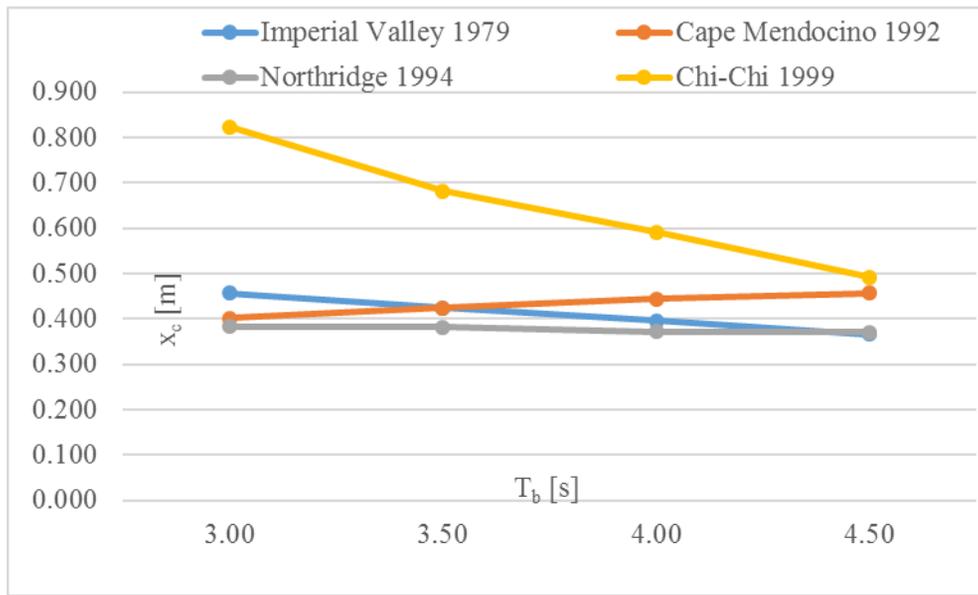
$$F_b = \sqrt{(S_{ai} \cdot m_i)^2 + (S_{ac} \cdot m_c)^2} \quad (59)$$

Donde  $S_{ai}$  y  $S_{ac}$  son las ordenadas espectrales correspondientes al período de la masa impulsiva y convectiva, respectivamente. Por estar la masa impulsiva rígidamente conectada al suelo (paredes del tanque sin flexibilidad),  $S_{ai} = \text{PGA}$ . La ecuación para  $F_b$  es conservadora, dado que la respuesta máxima de cada modo de vibración (impulsivo y convectivo) no se produce en el mismo instante.

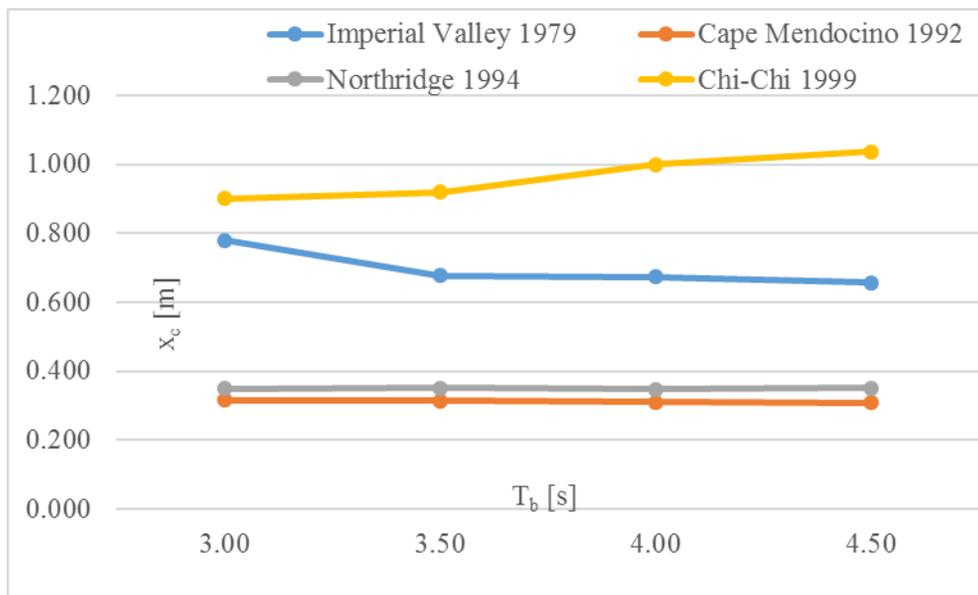
### 3 RESULTADOS

A continuación, se presentan los valores máximos obtenidos del análisis de la historia de la respuesta, según se describió en los apartados anteriores.

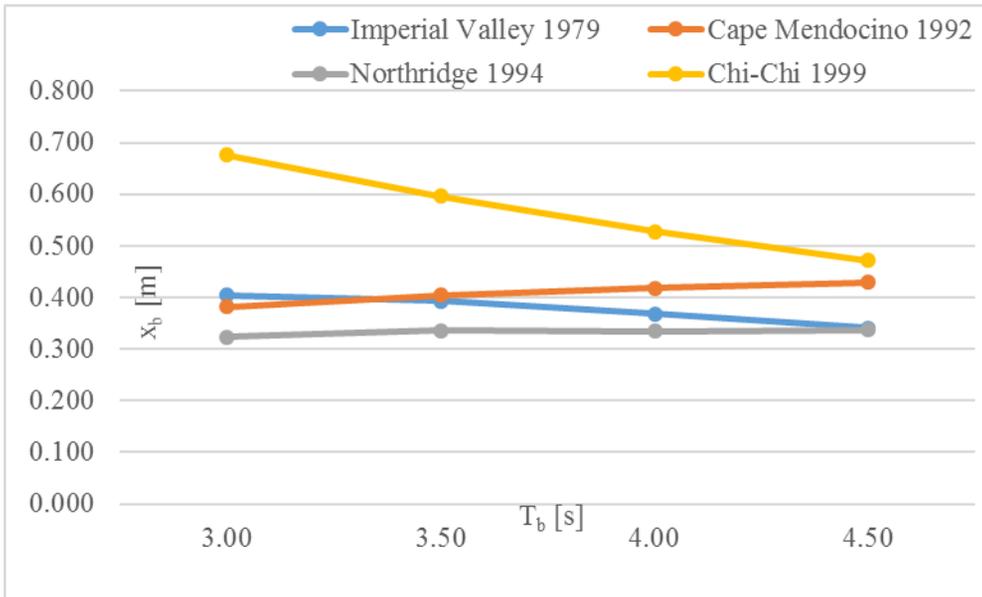
#### 3.1 Incidencia del período de aislación en la respuesta del tanque



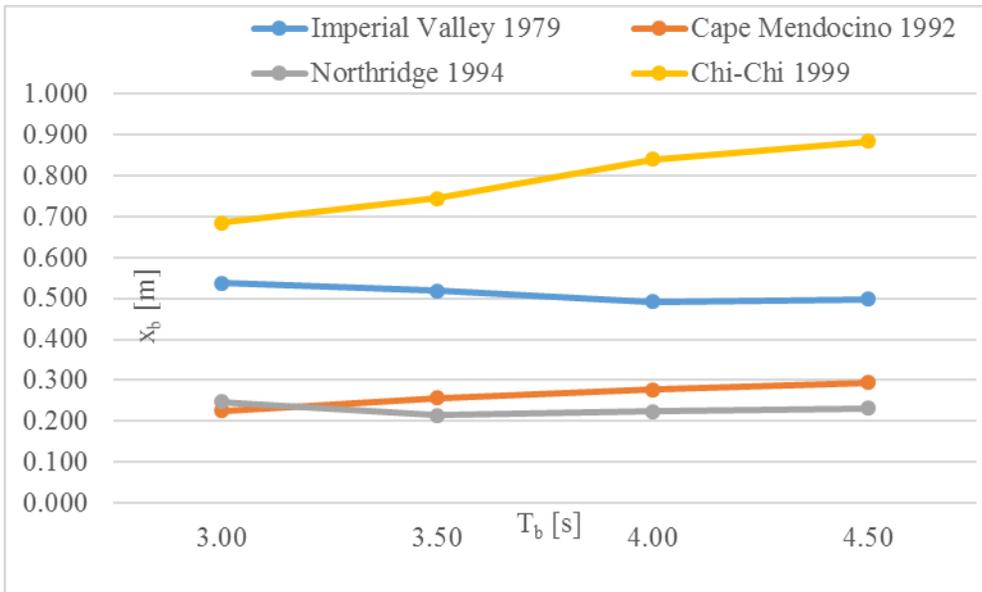
**Figura 8** Variación del desplazamiento convectivo  $x_c$  con el cambio de período de aislación  $T_b$ , para un tanque ancho ( $H/R=0.50$ ) -  $\mu = 0.05$



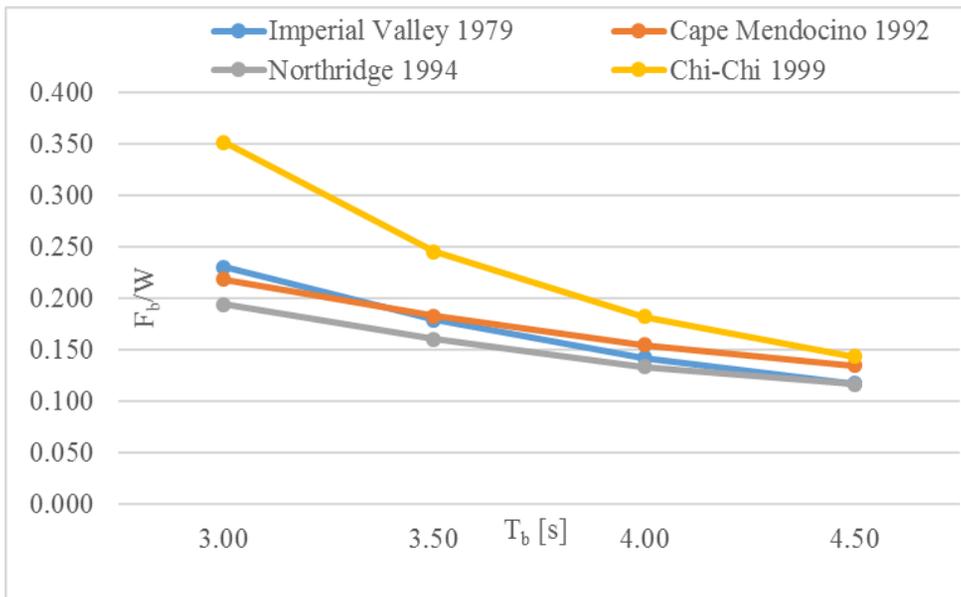
**Figura 9** Variación del desplazamiento convectivo  $x_c$  con el cambio de período de aislación  $T_b$ , para un tanque esbelto ( $H/R=2.00$ ) -  $\mu = 0.05$



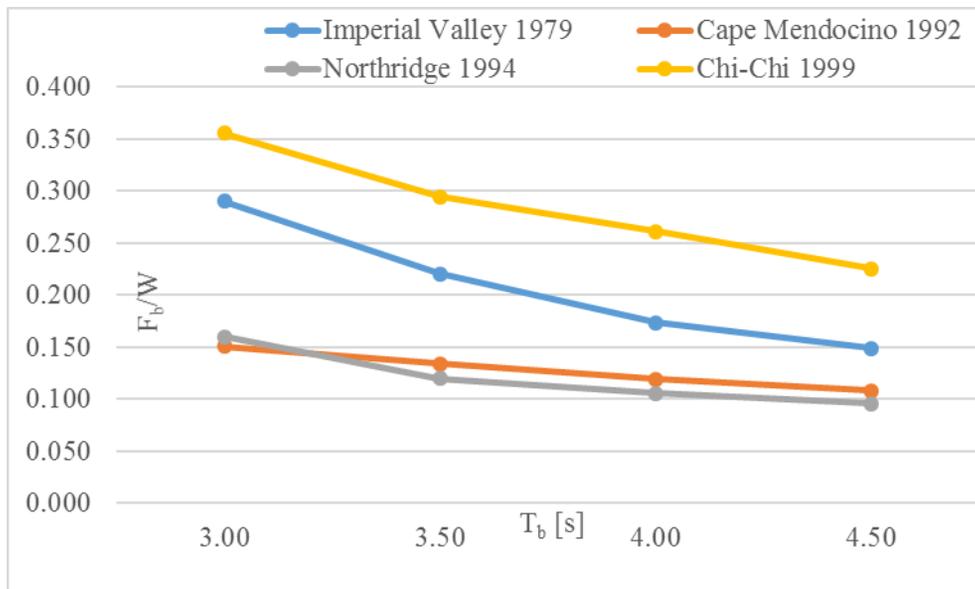
**Figura 10** Variación del desplazamiento del aislador  $x_b$  con el cambio de período de aislación  $T_b$ , para un tanque ancho ( $H/R=0.50$ ) -  $\mu = 0.05$



**Figura 11** Variación del desplazamiento del aislador  $x_b$  con el cambio de período de aislación  $T_b$ , para un tanque esbelto ( $H/R=2.00$ ) -  $\mu = 0.05$



**Figura 12** Variación del corte basal normalizado  $F_b/W$  con el cambio de período de aislación  $T_b$ , para un tanque ancho ( $H/R=0.50$ ) -  $\mu = 0.05$

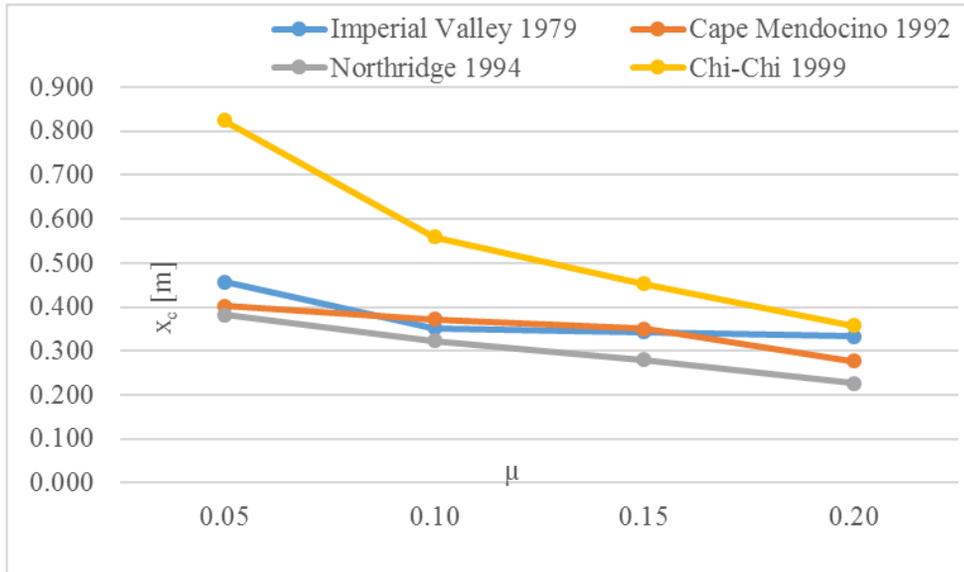


**Figura 13** Variación del corte basal normalizado  $F_b/W$  con el cambio de período de aislación  $T_b$ , para un tanque esbelto ( $H/R=2.00$ ) -  $\mu = 0.05$

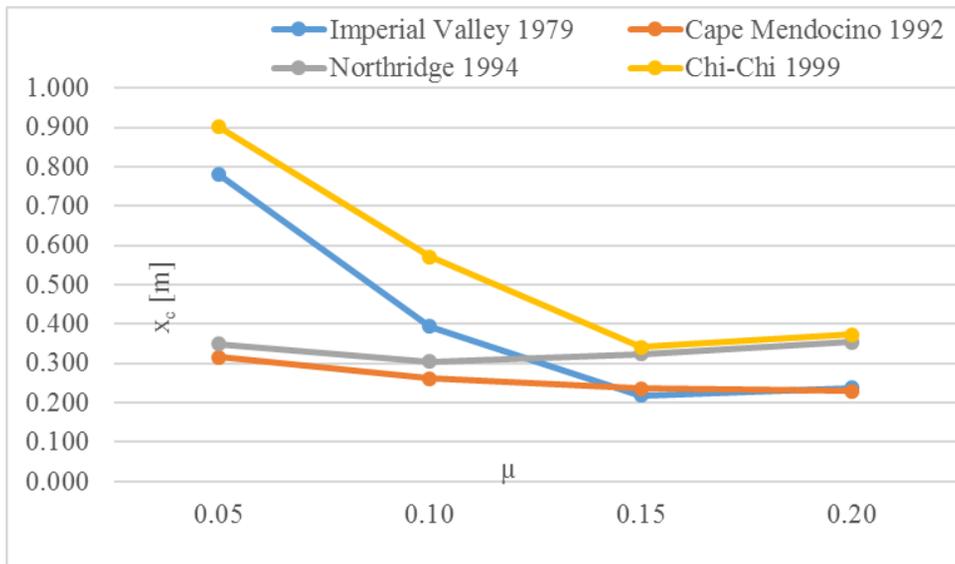
Se observa que, en la mayoría de los registros sísmicos, el aumento del período con aislación no genera una reducción apreciable en el desplazamiento de la masa convectiva del tanque, responsable del oleaje en la superficie libre. Queda claramente expuesto que el aumento del período con aislación conduce a una importante reducción del corte basal normalizado. Por último, se aprecia que, en la

mayoría de los registros, a excepción de Chichi, el cambio en el período con aislación no modifica sustancialmente la respuesta en términos de desplazamientos. Para el registro de Chichi se observa que, con el aumento del período de aislación, se produce una disminución de la respuesta de desplazamientos en los tanques anchos y un aumento en el caso de los tanques esbeltos.

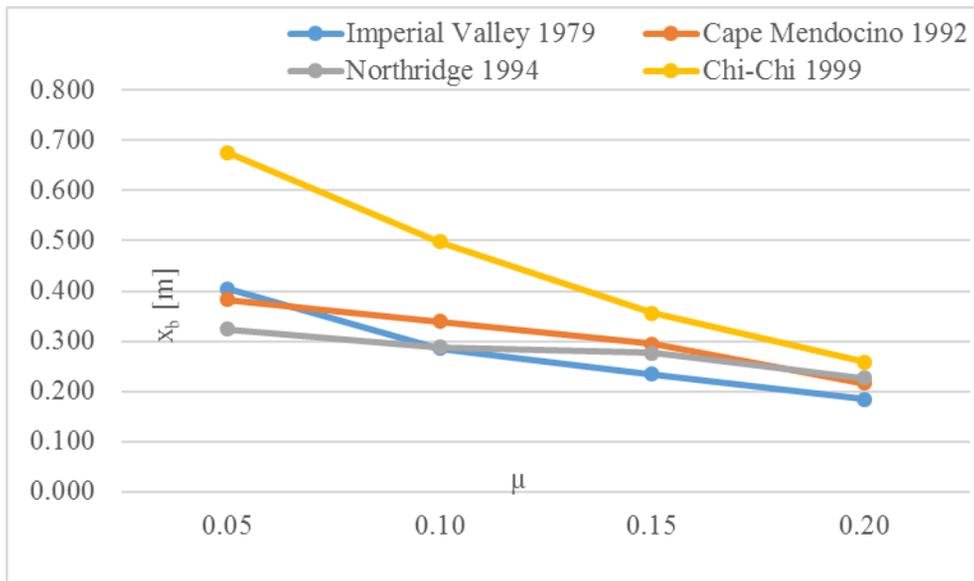
**3.2 Incidencia del coeficiente de fricción en la respuesta del tanque**



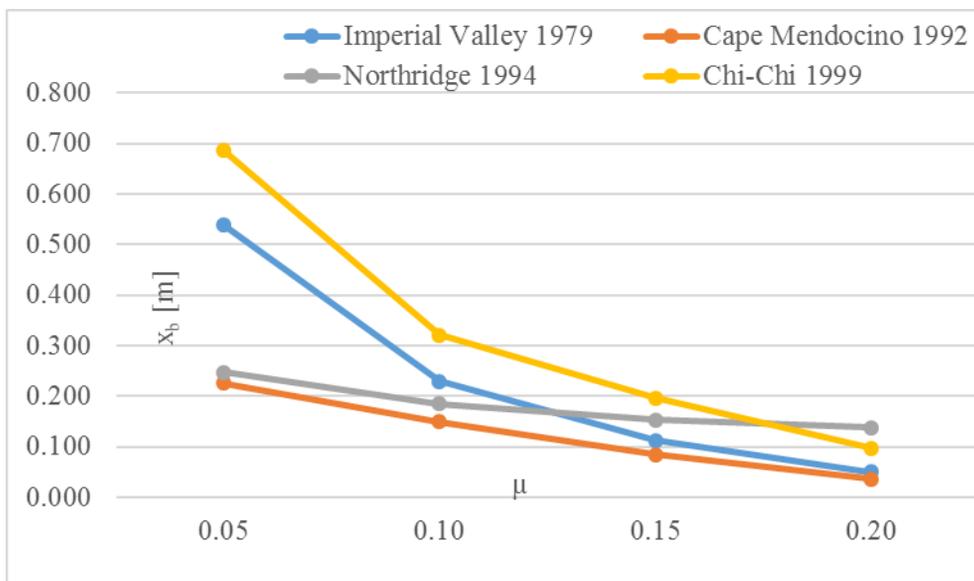
**Figura 14** Variación del desplazamiento convectivo  $x_c$  con el cambio del coeficiente de fricción  $\mu$ , para un tanque ancho ( $H/R=0.50$ ) -  $T_b = 3.00s$



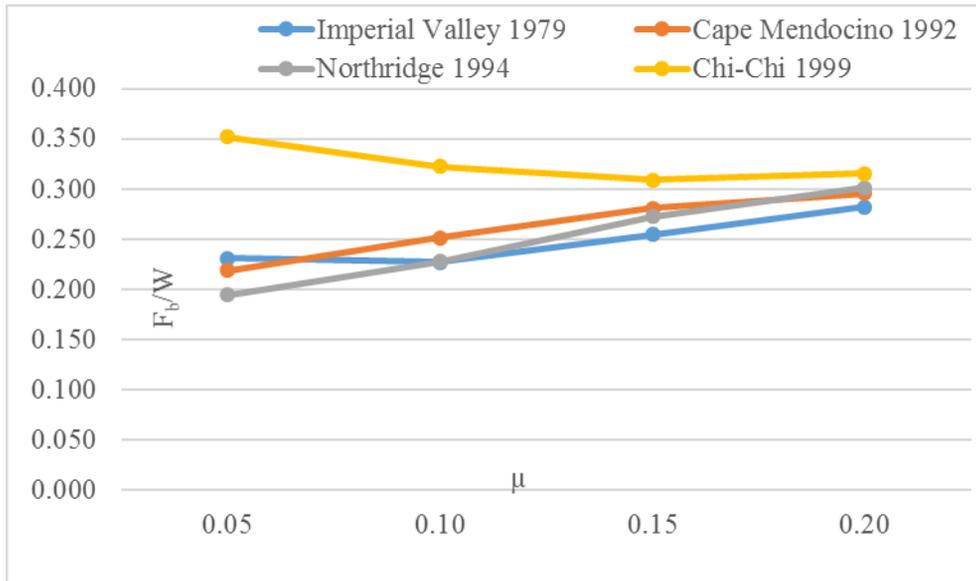
**Figura 15** Variación del desplazamiento convectivo  $x_c$  con el cambio del coeficiente de fricción  $\mu$ , para un tanque esbelto ( $H/R=2.00$ ) -  $T_b = 3.00s$



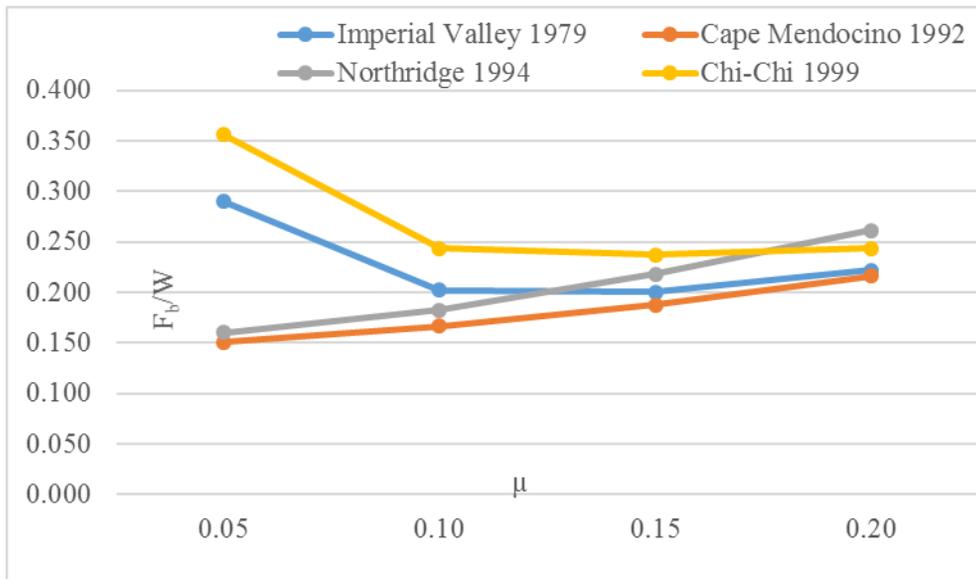
**Figura 16** Variación del desplazamiento del aislador  $x_b$  con el cambio del coeficiente de fricción  $\mu$ , para un tanque ancho ( $H/R=0.50$ ) -  $T_b = 3.00s$



**Figura 17** Variación del desplazamiento del aislador  $x_b$  con el cambio del coeficiente de fricción  $\mu$ , para un tanque esbelto ( $H/R=2.00$ ) -  $T_b = 3.00s$



**Figura 18** Variación del corte basal normalizado  $F_b/W$  con el cambio del coeficiente de fricción  $\mu$ , para un tanque ancho ( $H/R=0.50$ ) -  $T_b = 3.00s$



**Figura 19** Variación del corte basal normalizado  $F_b/W$  con el cambio del coeficiente de fricción  $\mu$ , para un tanque esbelto ( $H/R=2.00$ ) -  $T_b = 3.00s$

Se observa que, el aumento del coeficiente de fricción provoca una reducción del desplazamiento convectivo y del desplazamiento del aislador. Por otro lado, al incrementarse la fricción, en general aumenta el corte basal normalizado, a excepción del registro de Chichi en tanques anchos, y Chichi e Imperial Valley en tanques esbeltos, donde se observa una disminución del corte.

3.3 Incidencia de la relación de esbeltez en la respuesta del tanque

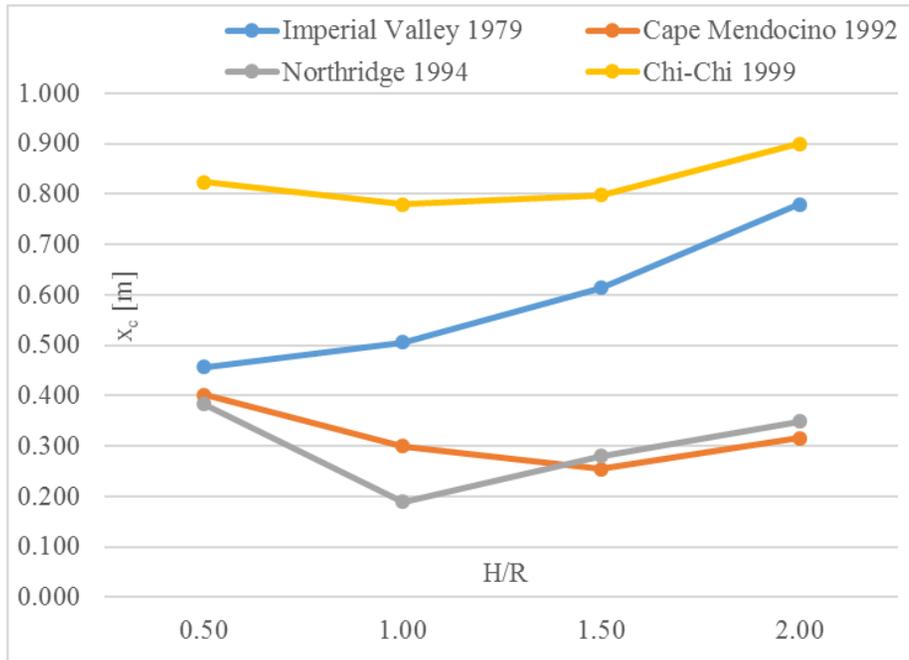


Figura 20 Variación del desplazamiento convectivo  $x_c$  para un período de aislación  $T_b=3.00s$  -  $\mu = 0.05$

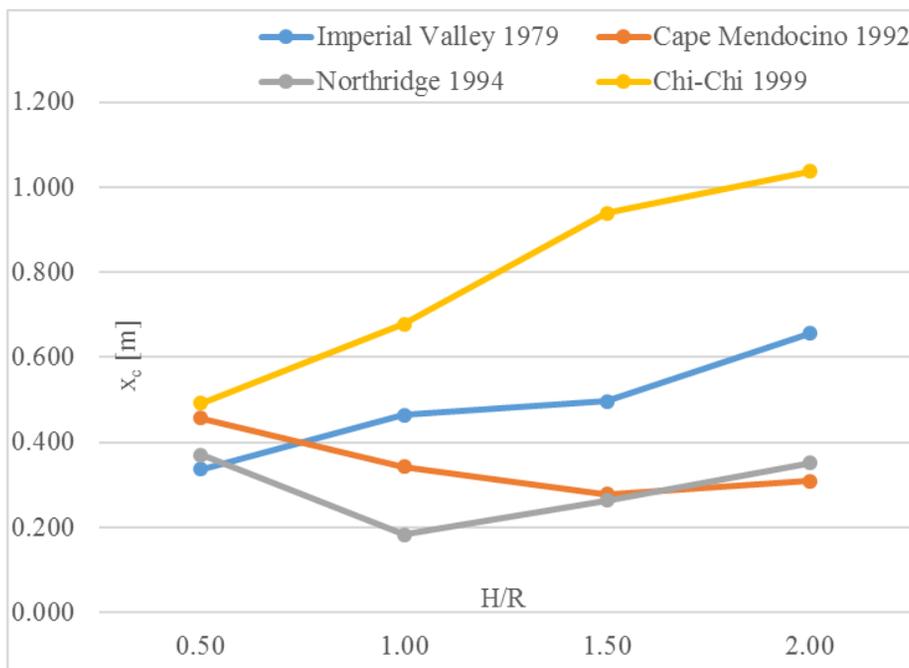
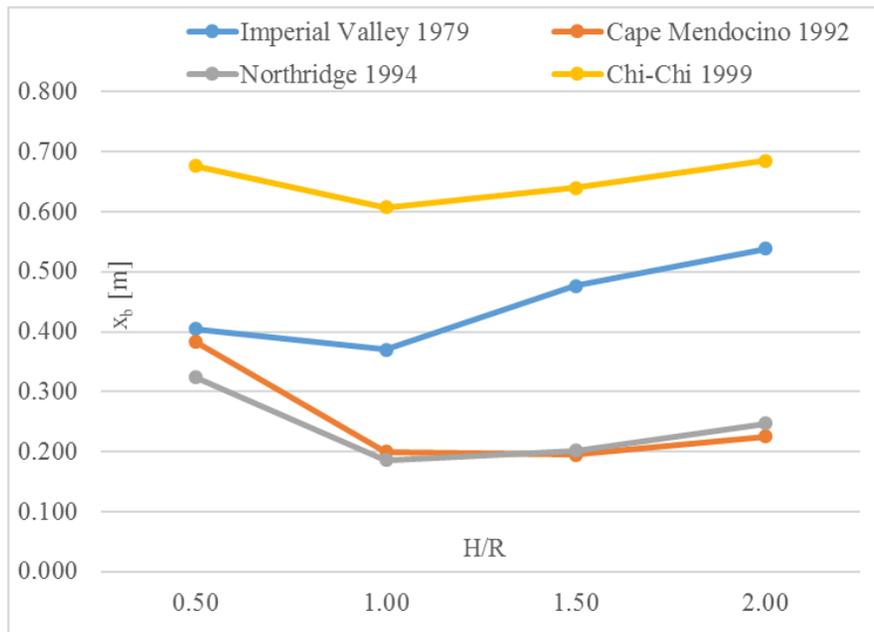
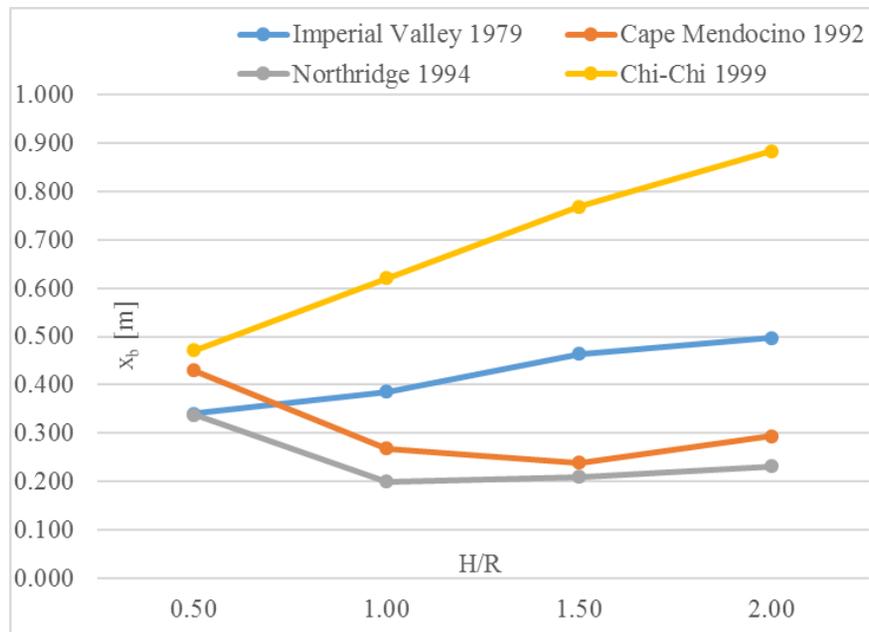


Figura 21 Variación del desplazamiento convectivo  $x_c$  para un período de aislación  $T_b=4.50s$  -  $\mu = 0.05$



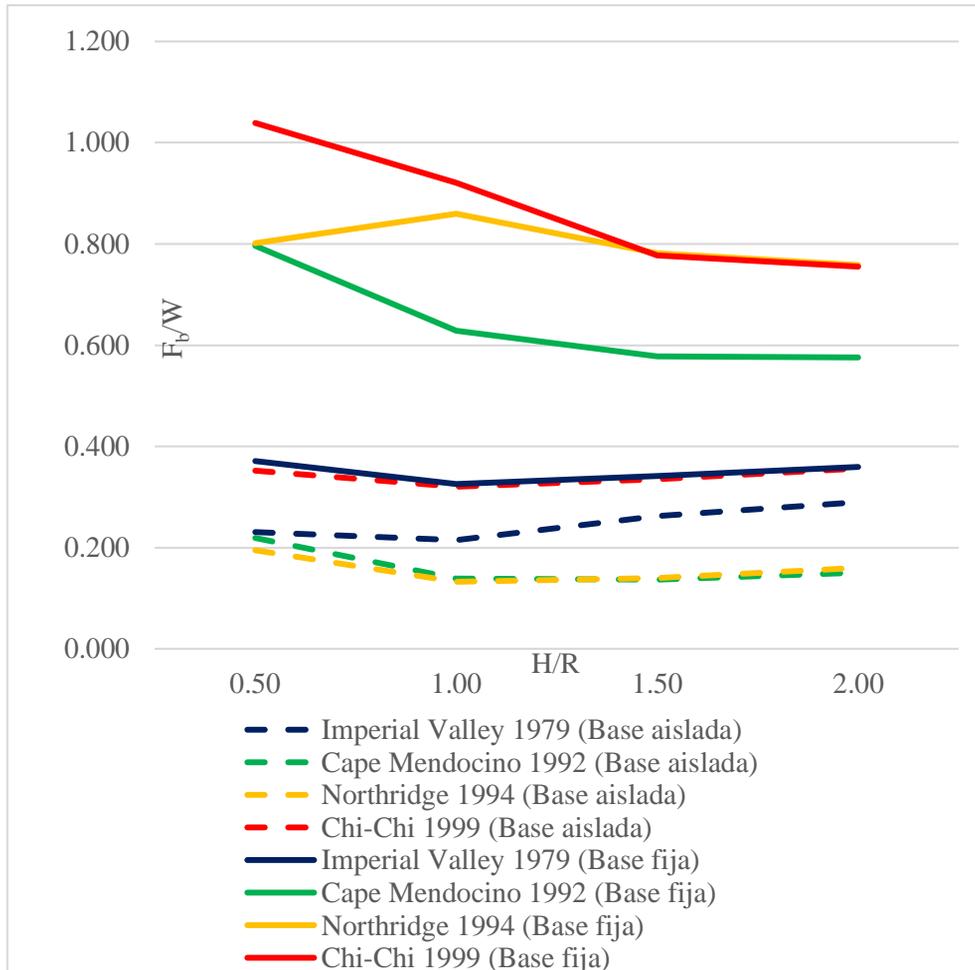
**Figura 22** Variación del desplazamiento del aislador  $x_b$  para un período de aislación  $T_b=3.00s - \mu = 0.05$



**Figura 23** Variación del desplazamiento del aislador  $x_b$  para un período de aislación  $T_b=4.50s - \mu = 0.05$

Se observan comportamientos diferenciados al aumentar la relación de esbeltez del tanque, mientras que Chichi e Imperial Valley aumentan su respuesta, Northridge y Cape Mendocino la reducen.

3.4 Efectividad del sistema de aislación



**Figura 24** Variación del corte basal normalizado  $F_b/W$  con el cambio de la relación de esbeltez, para un tanque no aislado y otro aislado con período de aislación  $T_b=3.00s$  y coeficiente de fricción  $\mu=0.05$

El sistema de aislación se muestra efectivo con todos los registros, tendiendo a un máximo de reducción del corte basal para la relación de esbeltez  $H/R = 1$ .

4 CONCLUSIONES

A partir del análisis de los resultados se concluye que:

- a) La técnica de aislación sísmica es efectiva para reducir la respuesta de los tanques;

b) El comportamiento del tanque bajo sismos impulsivos guarda estrecha relación con las características de los registros;

c) En registros con períodos de pulso altos, como Chichi o Imperial Valley, la respuesta en términos de desplazamiento se incrementa para tanques esbeltos en relación a los anchos, dado que en los primeros la contribución del modo aislado es muy importante, y se suma a la del modo convectivo;

d) La amplitud de potencia concentrada en bajas frecuencias en sismos de falla cercana afecta la respuesta de oleaje del tanque;

e) El incremento del coeficiente de fricción reduce la efectividad del sistema de aislación en términos de aceleraciones, incrementando el corte basal normalizado, pero ocasiona una reducción del desplazamiento convectivo, por su efecto de amortiguamiento sobre el sistema;

f) El coeficiente de fricción resulta ser un parámetro clave para balancear la respuesta de tanques anchos, entre una reducción de aceleración basal y un aumento de desplazamiento convectivo, el valor óptimo del mismo debe analizarse para cada registro sísmico particular;

g) El método propuesto permite obtener la respuesta sísmica de tanques aislados con razonable exactitud y un muy bajo costo computacional.

## 5 REFERENCIAS

[1] Westergaard HM (1933): Water pressures on dams during earthquakes. Transactions of the American Society of Civil Engineers, 98 (2), 418-433.

[2] Jacobsen LS (1949): Impulsive hydrodynamics of fluid inside a cylindrical tank and of fluid surrounding a cylindrical pier. Bulletin of the Seismological Society of America, 39 (3), 189-204.

[3] Housner GW (1957): Dynamic pressures on accelerated fluid containers. Bulletin of the Seismological Society of America, 47 (1), 15-35.

[4] Housner GW (1963): The dynamic behavior of water tanks. Bulletin of the Seismological Society of America, 53 (2), 381-387.

[5] Veletsos AS (1973): Seismic effects in flexible liquid storage tanks. Proceedings of Fifth World Conference on Earthquake Engineering, 1, 630-639.

[6] Haroun MA, Housner GW (1981): Earthquake response of deformable liquid storage tanks. Journal of Applied Mechanics, 48 (2), 411-418.

[7] Haroun MA (1983): Vibration studies and tests of liquid storage tanks. Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 11 (2), 179-206.

[8] Malhotra PK (1997): New method for seismic isolation of liquid-storage tanks. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 26 (8), 839-847.

---

[9] Wang YP, Teng MC, Chung KW (2001): Seismic isolation of rigid cylindrical tanks using friction pendulum bearings. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 30 (7), 1083-1099.

[10] Shrimali MK, Jangid RS (2002): Non-linear seismic response of base-isolated liquid storage tanks to bi-directional excitation. *Nuclear Engineering and Design*, 217 (1), 1-20.

[11] Panchal VR, Jangid RS (2008): Variable friction pendulum system for seismic isolation of liquid storage tanks. *Nuclear Engineering and Design*, 238 (6), 1304-1315.

[12] Panchal VR, Jangid RS (2012): Behaviour of liquid storage tanks with VCFPS under near-fault ground motions. *Structure and Infrastructure Engineering*, 8 (1), 71-88.

[13] Abalı E, Uçkan E (2010): Parametric analysis of liquid storage tanks base isolated by curved surface sliding bearings. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, 30 (1), 21-31.

[14] Saha SK, Matsagar VA, Jain AK (2014): Earthquake response of base-isolated liquid storage tanks for different isolator models. *Journal of Earthquake and Tsunami*, 8 (5), 1-22.

[15] Almazán JL (2014): Demostración de las ecuaciones de Euler-Lagrange a partir del Principio de Trabajos Virtuales y la Segunda Ley de Newton. *Apuntes Dinámica Computacional ICE 3733*. Pontificia Universidad Católica de Chile.

## 6 ANEXO A: RUTINA EN MATLAB

```

%xi desplazamiento horizontal masa impulsiva
%xc desplazamiento horizontal masa convectiva
%vi velocidad de la masa impulsiva
%vc velocidad de la masa convectiva
%ai aceleración de la masa impulsiva
%ac aceleración de la masa convectiva
%as aceleración del suelo
%hi altura desde la base de la masa impulsiva
%hc altura desde la base de la masa convectiva
%kc rigidez resorte masa convectiva
%ec factor de amortiguamiento convectivo
%R radio curvatura péndulo
%u coeficiente fricción péndulo
%g aceleración de la gravedad
%La distancia centro tanque a péndulo

syms xi xc vi vc ai ac as hi hc mi mc kc ec R u g La A B real

% Grados de libertad
q=[xi;xc]
qv=[vi;vc]
qa=[ai;ac]

% Vectores de posición de las masas
ri=[xi;hi+R-(R^2-xi^2)^0.5]
rc=[xi+xc;hc+R-(R^2-xi^2)^0.5]

%Vectores de velocidad
rvi=jacobian(ri,q)*qv
rvc=jacobian(rc,q)*qv

%Energía cinética
Ti=0.5*mi*rvi.'*rvi
Tc=0.5*mc*rvc.'*rvc
T=Ti+Tc

%Energía potencial gravitatoria
Vgi=g*mi*ri(2)
Vgc=g*mc*rc(2)

%Energía potencial elástica
Vsi=0
Vsc=0.5*kc*(xc-xi)^2

%Energía potencial total
Vi=Vgi+Vsi
Vc=Vgc+Vsc
V=Vi+Vc

```

```

%Fuerza de rozamiento péndulo en dirección tangencial
N= ((g*cos(asin(xi/R)))+(1/R)*((vi*cos(asin(xi/R)))^2))*((mi+mc)/2)
Frt_1=-u*N*sign(vi)
Frt_2=-u*N*sign(vi)

%Fuerza de rozamiento péndulo en coordenadas x,y
Fr_1=[Frt_1*cos(asin(xi/R));Frt_1*sin(asin(xi/R))]
Fr_2=[Frt_2*cos(asin(xi/R));Frt_2*sin(asin(xi/R))]

%Vector de posición del péndulo
rp_1=[xi-La;R-(R^2-xi^2)^0.5]
rp_2=[xi+La;R-(R^2-xi^2)^0.5]

%Trabajo de Fr
Fp_1=rp_1.'*Fr_1
Fp_2=rp_2.'*Fr_2

%Proyección de Fp respecto a los grados de libertad
Fpq=jacobian(Fp_1,q)+jacobian(Fp_2,q)

%Amortiguamiento convectivo
wc=(kc/mc)^0.5
cc=2*mc*wc*ec

%Fuerza de amortiguamiento en coordenadas x,y
Fa=[-cc*vc*sign(vc);0]

%Trabajo de Fa
Fc=rc.'*Fa

%Proyección de Fc respecto a los grados de libertad
Fcq=jacobian(Fc,q)

%Fuerza no conservativa
Qnc=[Fpq(1)+Fcq(1);Fpq(2)+Fcq(2)]

%Primer término ecuación de Euler-Lagrange
A1=jacobian(jacobian(T,qv),qv)
A2=jacobian(jacobian(T,q),qv)
A=A1*qa+A2*qv

%Segundo término ecuación de Euler-Lagrange
B=jacobian(T,q)

%Tercer término ecuación de Euler-Lagrange
C=jacobian(V,q)

```

```

%Introducción de la fuerza sísmica
Ms=[mi,0;0,mc] %Matriz de masa
n=[1;1] %Vector de colocación
Fs=Ms*n*as

%Ecuación Euler Lagrange (dos ecuaciones diferenciales de
segundo orden)
EL=A-B.'+C.'-Qnc+Fs

%Despeje de ecuación de segundo orden (despejo aceleración,
en forma manual, usar pretty(EL) para ver mejor)
L(1,1)=(mc + mi + (mc*xi^2)/(R^2 - xi^2) + (mi*xi^2)/(R^2 -
xi^2))
L(1,2)=mc
L(2,1)=mc
L(2,2)=mc
FNL(1,1)=EL(1)-ai*L(1,1)-ac*L(1,2)
FNL(2,1)=EL(2)-ai*L(2,1)-ac*L(2,2)
a=-inv(L)*FNL

%Cambio de variables (asigno variable "y" a desplazamientos y
velocidades): y(1)=xi y(2)=xc y(3)=vi y(4)=vc reemplazo en
a(1,1)=ec1 y en a(2,1)=ec2)
%ec1=((R^2 - y(1)^2)*(as*mc + (kc*(2*y(2) - 2*y(1)))/2 +
2*ec*mc*y(4)*sign(y(4))*(kc/mc)^(1/2)))/(mi*R^2 + mc*y(1)^2)
- ((R^2 - y(1)^2)*(as*mi + y(3)*((2*mc*y(3)*y(1))/(R^2 -
y(1)^2) + (2*mi*y(3)*y(1))/(R^2 - y(1)^2) +
(2*mc*y(3)*y(1)^3)/(R^2 - y(1)^2)^2 + (2*mi*y(3)*y(1)^3)/(R^2
- y(1)^2)^2) - (kc*(2*y(2) - 2*y(1)))/2 -
(mc*y(3)^2*y(1)^3)/(R^2 - y(1)^2)^2 - (mi*y(3)^2*y(1)^3)/(R^2
- y(1)^2)^2 + (g*mc*y(1))/(R^2 - y(1)^2)^(1/2) +
(g*mi*y(1))/(R^2 - y(1)^2)^(1/2) - (mc*y(3)^2*y(1))/(R^2 -
y(1)^2) - (mi*y(3)^2*y(1))/(R^2 - y(1)^2) + 2*u*sign(y(3))*(1
- y(1)^2/R^2)^(1/2)*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2) -
(y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1))/R) +
2*ec*mc*y(4)*sign(y(4))*(kc/mc)^(1/2) + (2*u*sign(y(3)))*(R -
(R^2 - y(1)^2)^(1/2))*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2)
- (y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1))/R))/R + u*sign(y(3))*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)*((2*y(3)^2*y(1))/R^3 + (g*y(1))/(R^2*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)))*(La - y(1))*(mc/2 + mi/2) -
u*sign(y(3))*(La + y(1))*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)*((2*y(3)^2*y(1))/R^3 + (g*y(1))/(R^2*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)))*(mc/2 + mi/2) +
(2*u*y(1)^2*sign(y(3))*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2) - (y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1))/R))/(R*(R^2 -
y(1)^2)^(1/2)) - (2*u*y(1)*sign(y(3)))*((2*y(3)^2*y(1))/R^3 +
(g*y(1))/(R^2*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2)))*(R - (R^2 -
y(1)^2)^(1/2))*(mc/2 + mi/2))/R + (u*y(1)*sign(y(3)))*(La -
y(1))*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2) -
(y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1))/R))/(R^2*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2)) -
(u*y(1)*sign(y(3)))*(La + y(1))*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 -

```

```

y(1)^2/R^2)^(1/2) - (y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1)/R))/ (R^2*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2))))/(mi*R^2 + mc*y(1)^2)
%ec2= ((R^2 - y(1)^2)*(as*mi + y(3)*((2*mc*y(3)*y(1))/(R^2 -
y(1)^2) + (2*mi*y(3)*y(1))/(R^2 - y(1)^2) +
(2*mc*y(3)*y(1)^3)/(R^2 - y(1)^2)^2 + (2*mi*y(3)*y(1)^3)/(R^2
- y(1)^2)^2) - (kc*(2*y(2) - 2*y(1)))/2 -
(mc*y(3)^2*y(1)^3)/(R^2 - y(1)^2)^2 - (mi*y(3)^2*y(1)^3)/(R^2
- y(1)^2)^2 + (g*mc*y(1))/(R^2 - y(1)^2)^(1/2) +
(g*mi*y(1))/(R^2 - y(1)^2)^(1/2) - (mc*y(3)^2*y(1))/(R^2 -
y(1)^2) - (mi*y(3)^2*y(1))/(R^2 - y(1)^2) + 2*u*sign(y(3))* (1
- y(1)^2/R^2)^(1/2)*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2) -
(y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1)/R) +
2*ec*mc*y(4)*sign(y(4))*(kc/mc)^(1/2) + (2*u*sign(y(3)))*(R -
(R^2 - y(1)^2)^(1/2))*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2)
- (y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1)/R))/R + u*sign(y(3))*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)*((2*y(3)^2*y(1))/R^3 + (g*y(1))/(R^2*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)))*(La - y(1))*(mc/2 + mi/2) -
u*sign(y(3))*(La + y(1))*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)*((2*y(3)^2*y(1))/R^3 + (g*y(1))/(R^2*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)))*(mc/2 + mi/2) +
(2*u*y(1)^2*sign(y(3))*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2) - (y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1)/R))/ (R*(R^2 -
y(1)^2)^(1/2)) - (2*u*y(1)*sign(y(3))*((2*y(3)^2*y(1))/R^3 +
(g*y(1))/(R^2*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2)))*(R - (R^2 -
y(1)^2)^(1/2))*(mc/2 + mi/2))/R + (u*y(1)*sign(y(3))*(La -
y(1))*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2) -
(y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1)/R))/ (R^2*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2)) -
(u*y(1)*sign(y(3))*(La + y(1))*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2) - (y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1)/R))/ (R^2*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2))))/(mi*R^2 + mc*y(1)^2) - ((R^2*mc +
R^2*mi)*(as*mc + (kc*(2*y(2) - 2*y(1)))/2 +
2*ec*mc*y(4)*sign(y(4))*(kc/mc)^(1/2)))/(mc*(mi*R^2 +
mc*y(1)^2))

```

%Creación de función para integrar numéricamente

```

f=@(t,y,as)[y(3);y(4);((R^2 - y(1)^2)*(as*mc + (kc*(2*y(2) -
2*y(1)))/2 + 2*ec*mc*y(4)*sign(y(4))*(kc/mc)^(1/2)))/(mi*R^2
+ mc*y(1)^2) - ((R^2 - y(1)^2)*(as*mi +
y(3)*((2*mc*y(3)*y(1))/(R^2 - y(1)^2) + (2*mi*y(3)*y(1))/(R^2
- y(1)^2) + (2*mc*y(3)*y(1)^3)/(R^2 - y(1)^2)^2 +
(2*mi*y(3)*y(1)^3)/(R^2 - y(1)^2)^2) - (kc*(2*y(2) -
2*y(1)))/2 - (mc*y(3)^2*y(1)^3)/(R^2 - y(1)^2)^2 -
(mi*y(3)^2*y(1)^3)/(R^2 - y(1)^2)^2 + (g*mc*y(1))/(R^2 -
y(1)^2)^(1/2) + (g*mi*y(1))/(R^2 - y(1)^2)^(1/2) -
(mc*y(3)^2*y(1))/(R^2 - y(1)^2) - (mi*y(3)^2*y(1))/(R^2 -
y(1)^2) + 2*u*sign(y(3))* (1 - y(1)^2/R^2)^(1/2)*(mc/2 +
mi/2)*(g*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2) - (y(3)^2*(y(1)^2/R^2 -
1)/R) + 2*ec*mc*y(4)*sign(y(4))*(kc/mc)^(1/2) +
(2*u*sign(y(3)))*(R - (R^2 - y(1)^2)^(1/2))*(mc/2 +
mi/2)*(g*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2) - (y(3)^2*(y(1)^2/R^2 -
1)/R))/R + u*sign(y(3))*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)*((2*y(3)^2*y(1))/R^3 + (g*y(1))/(R^2*(1 -

```

```

y(1)^2/R^2)^(1/2)))*(La - y(1))*(mc/2 + mi/2) -
u*sign(y(3))*(La + y(1))*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)*((2*y(3)^2*y(1))/R^3 + (g*y(1))/(R^2*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)))*(mc/2 + mi/2) +
(2*u*y(1)^2*sign(y(3))*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2) - (y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1))/R))/R*(R^2 -
y(1)^2)^(1/2)) - (2*u*y(1)*sign(y(3))*((2*y(3)^2*y(1))/R^3 +
(g*y(1))/(R^2*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2)))*(R - (R^2 -
y(1)^2)^(1/2)))*(mc/2 + mi/2))/R + (u*y(1)*sign(y(3))*(La -
y(1))*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2) -
(y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1))/R))/R*(R^2*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2)) -
(u*y(1)*sign(y(3))*(La + y(1))*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2) - (y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1))/R))/R*(R^2*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)))/(mi*R^2 + mc*y(1)^2); ((R^2 -
y(1)^2)*(as*mi + y(3))*((2*mc*y(3)*y(1))/R^2 - y(1)^2) +
(2*mi*y(3)*y(1))/R^2 - y(1)^2) + (2*mc*y(3)*y(1)^3)/R^2 -
y(1)^2)^2 + (2*mi*y(3)*y(1)^3)/R^2 - y(1)^2)^2 -
(kc*(2*y(2) - 2*y(1)))/2 - (mc*y(3)^2*y(1)^3)/R^2 -
y(1)^2)^2 - (mi*y(3)^2*y(1)^3)/R^2 - y(1)^2)^2 +
(g*mc*y(1))/R^2 - y(1)^2)^(1/2) + (g*mi*y(1))/R^2 -
y(1)^2)^(1/2) - (mc*y(3)^2*y(1))/R^2 - y(1)^2) -
(mi*y(3)^2*y(1))/R^2 - y(1)^2) + 2*u*sign(y(3))*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2) -
(y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1))/R) +
2*ec*mc*y(4)*sign(y(4))*(kc/mc)^(1/2) + (2*u*sign(y(3)))*(R -
(R^2 - y(1)^2)^(1/2))*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2) -
(y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1))/R))/R + u*sign(y(3))*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)*((2*y(3)^2*y(1))/R^3 + (g*y(1))/(R^2*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)))*(La - y(1))*(mc/2 + mi/2) -
u*sign(y(3))*(La + y(1))*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)*((2*y(3)^2*y(1))/R^3 + (g*y(1))/(R^2*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)))*(mc/2 + mi/2) +
(2*u*y(1)^2*sign(y(3))*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2) - (y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1))/R))/R*(R^2 -
y(1)^2)^(1/2)) - (2*u*y(1)*sign(y(3))*((2*y(3)^2*y(1))/R^3 +
(g*y(1))/(R^2*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2)))*(R - (R^2 -
y(1)^2)^(1/2)))*(mc/2 + mi/2))/R + (u*y(1)*sign(y(3))*(La -
y(1))*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2) -
(y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1))/R))/R*(R^2*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2)) -
(u*y(1)*sign(y(3))*(La + y(1))*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2) - (y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1))/R))/R*(R^2*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)))/(mi*R^2 + mc*y(1)^2) - ((R^2*mc +
R^2*mi)*(as*mc + (kc*(2*y(2) - 2*y(1)))/2 +
2*ec*mc*y(4)*sign(y(4))*(kc/mc)^(1/2)))/(mc*(mi*R^2 +
mc*y(1)^2))]

```

%Asignación de valores

D=2 %Diámetro del tanque (dato)

H=2 %Altura de agua del tanque (dato)

p=1000 %Densidad del líquido contenido (dato)

g=9.81 %Aceleración de la gravedad

M=p\*pi\*H\*D\*D/4 %Masa total del tanque

```

hi=0.375*H %altura de la masa impulsiva
hc=H*(1-(D/(3.67*H)))*tanh(1.835*H/D) %altura de la masa
convectiva
mi=M*tanh(0.866*D/H)/(0.866*D/H) %masa impulsiva
mc=0.835*M*tanh(3.67*H/D)/(3.67*H/D) %masa convectiva
kc=16.13042*mc*mc*g*H/(M*D*D) %rigidez convectiva
ec=0.005 %factor de amortiguamiento convectivo (dato)
u=0.05 %coeficiente fricción péndulo (dato)
R=5.03 %radio curvatura péndulo (dato) 5.03 3.98 3.04 2.24
La=1 %distancia centro tanque a péndulo
Registro=load('CHICHI-0.005-g.txt');
as=[Registro(:,2)*9.81; zeros(18000,1)];%Aceleración del
suelo
t=Registro(:,1);

```

%Integración RK3

```

f=@(t,y,as)[y(3);y(4);((R^2 - y(1)^2)*(as*mc + (kc*(2*y(2) -
2*y(1))))/2 + 2*ec*mc*y(4)*sign(y(4))*(kc/mc)^(1/2)))/(mi*R^2
+ mc*y(1)^2) - ((R^2 - y(1)^2)*(as*mi +
y(3)*((2*mc*y(3)*y(1))/(R^2 - y(1)^2) + (2*mi*y(3)*y(1))/(R^2
- y(1)^2) + (2*mc*y(3)*y(1)^3)/(R^2 - y(1)^2)^2 +
(2*mi*y(3)*y(1)^3)/(R^2 - y(1)^2)^2 - (kc*(2*y(2) -
2*y(1)))/2 - (mc*y(3)^2*y(1)^3)/(R^2 - y(1)^2)^2 -
(mi*y(3)^2*y(1)^3)/(R^2 - y(1)^2)^2 + (g*mc*y(1))/(R^2 -
y(1)^2)^(1/2) + (g*mi*y(1))/(R^2 - y(1)^2)^(1/2) -
(mc*y(3)^2*y(1))/(R^2 - y(1)^2) - (mi*y(3)^2*y(1))/(R^2 -
y(1)^2) + 2*u*sign(y(3))*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2)*(mc/2 +
mi/2)*(g*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2) - (y(3)^2*(y(1)^2/R^2 -
1))/R) + 2*ec*mc*y(4)*sign(y(4))*(kc/mc)^(1/2) +
(2*u*sign(y(3)))*(R - (R^2 - y(1)^2)^(1/2))*(mc/2 +
mi/2)*(g*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2) - (y(3)^2*(y(1)^2/R^2 -
1))/R))/R + u*sign(y(3))*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)*((2*y(3)^2*y(1))/R^3 + (g*y(1))/(R^2*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)))*(La - y(1))*(mc/2 + mi/2) -
u*sign(y(3))*(La + y(1))*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)*((2*y(3)^2*y(1))/R^3 + (g*y(1))/(R^2*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)))*(mc/2 + mi/2) +
(2*u*y(1)^2*sign(y(3))*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2) - (y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1))/R))/R*(R^2 -
y(1)^2)^(1/2) - (2*u*y(1)*sign(y(3)))*((2*y(3)^2*y(1))/R^3 +
(g*y(1))/(R^2*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2)))*(R - (R^2 -
y(1)^2)^(1/2))*(mc/2 + mi/2))/R + (u*y(1)*sign(y(3)))*(La -
y(1))*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2) -
(y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1))/R))/R*(R^2*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2)) -
(u*y(1)*sign(y(3)))*(La + y(1))*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2) - (y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1))/R))/R*(R^2*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)))/(mi*R^2 + mc*y(1)^2); ((R^2 -
y(1)^2)*(as*mi + y(3)*((2*mc*y(3)*y(1))/(R^2 - y(1)^2) +
(2*mi*y(3)*y(1))/(R^2 - y(1)^2) + (2*mc*y(3)*y(1)^3)/(R^2 -
y(1)^2)^2 + (2*mi*y(3)*y(1)^3)/(R^2 - y(1)^2)^2 -
(kc*(2*y(2) - 2*y(1)))/2 - (mc*y(3)^2*y(1)^3)/(R^2 -
y(1)^2)^2 - (mi*y(3)^2*y(1)^3)/(R^2 - y(1)^2)^2 +

```

```

(g*mc*y(1))/(R^2 - y(1)^2)^(1/2) + (g*mi*y(1))/(R^2 -
y(1)^2)^(1/2) - (mc*y(3)^2*y(1))/(R^2 - y(1)^2) -
(mi*y(3)^2*y(1))/(R^2 - y(1)^2) + 2*u*sign(y(3))*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2) -
(y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1))/R) +
2*ec*mc*y(4)*sign(y(4))*(kc/mc)^(1/2) + (2*u*sign(y(3))*(R -
(R^2 - y(1)^2)^(1/2))*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2) -
(y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1))/R))/R + u*sign(y(3))*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)*((2*y(3)^2*y(1))/R^3 + (g*y(1))/(R^2*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)))*(La - y(1))*(mc/2 + mi/2) -
u*sign(y(3))*(La + y(1))*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)*((2*y(3)^2*y(1))/R^3 + (g*y(1))/(R^2*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)))*(mc/2 + mi/2) +
(2*u*y(1)^2*sign(y(3))*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2) - (y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1))/R))/(R*(R^2 -
y(1)^2)^(1/2)) - (2*u*y(1)*sign(y(3))*((2*y(3)^2*y(1))/R^3 +
(g*y(1))/(R^2*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2)))*(R - (R^2 -
y(1)^2)^(1/2))*(mc/2 + mi/2))/R + (u*y(1)*sign(y(3))*(La -
y(1))*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2) -
(y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1))/R))/(R^2*(1 - y(1)^2/R^2)^(1/2)) -
(u*y(1)*sign(y(3))*(La + y(1))*(mc/2 + mi/2)*(g*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2) - (y(3)^2*(y(1)^2/R^2 - 1))/R))/(R^2*(1 -
y(1)^2/R^2)^(1/2)))/(mi*R^2 + mc*y(1)^2) - ((R^2*mc +
R^2*mi)*(as*mc + (kc*(2*y(2) - 2*y(1)))/2 +
2*ec*mc*y(4)*sign(y(4))*(kc/mc)^(1/2)))/(mc*(mi*R^2 +
mc*y(1)^2))]
t0 = 0; % Ingresar condición inicial de t
y0 = [0;0;0;0]; % Ingresar condición inicial de y
T = 150; % Ingresar valor final de t
h = 0.005; % Ingresar tamaño de paso de integración
N = round( (T-t0)/h ); % Número de pasos desde t0 a T;
ROUND(X) redondea los elementos de X al entero más próximo
tn = linspace( t0, T, N+1); % Intervalo de tiempo;
Linspace(t0, T, N+1) genera N+1 puntos entre t0 y T
y = zeros(4, N+1); % Intervalo de vector de estado; ZEROS(1,
N+1) es una matriz de ceros de 4 filas y (N+1) columnas
y(:, 1) = y0; % Almacenamiento del valor inicial x0 en x
t = t0; % Inicializa t con t0
for i = 1:N % Ciclo de Runge-Kutta (explícito de 1 paso,
necesita conocer 1 sólo punto anterior) para hallar los 2
primeros puntos dato necesarios para Adams-Bashforth
(explícito de múltiple paso); explícito: usa información
hacia atrás (conocida)
    k1 = f(t,y(:,i),as(i+1)); % Evaluación del incremento de
pendiente al comienzo del intervalo usando y' (Euler)
    k2 = f(t+h/2, y(:,i)+h/2*k1, as(i+1)); % Evaluación del
incremento de pendiente a mitad del intervalo usando
y'+h/2*k1
    k3 = f(t+h, y(:,i)-h*k1+2*h*k2, as(i+1)); % Evaluación
del incremento de pendiente al final del intervalo usando y'-
h*k1+2*h*k2

```

```
y(:,i+1)=y(:,i)+h/4*(k1 + 2*k2 + k3); % Determina el
valor de y, usando el valor anterior (1 paso) más el promedio
ponderado de tres incrementos, donde cada incremento es el
producto del tamaño del intervalo, h , y una pendiente
estimada especificada por la función f en el lado derecho de
la ecuación diferencial, una vez obtenido el valor de y, se
descartan las 3 evaluaciones realizadas
t = t + h; % Determina el punto de tiempo a evaluar en el
siguiente ciclo
end

desplimax=max(abs(y(1,:))) % Desplazamiento impulsivo máximo
desplcmax=max(abs(y(2,:))) % Desplazamiento convectivo máximo
Cs=max(abs(y(1,:)./R+sign(y(3,:)).*u)) % Corte basal
normalizado máximo

ttran=tn';
ytran=y';
figure;
plot(tn, y(1,:), 'r-'); % Gráfica desplazamiento impulsivo
xlabel('t (s)');
ylabel('xi (m)');
hold on;
plot(tn, y(2,:), 'b-'); % Gráfica desplazamiento convectivo
xlabel('t (s)');
ylabel('xc (m)');
```